从形式化的终极奇点的组合数学到三维双有理几何

陈猛
复旦大学

2015年3月4日

♦ 双有理几何的目标集合={射影代数簇}/特征 0 代数闭域 k, 例如：$k = \mathbb{C}$.

问题背景

♦ 双有理几何的目标集合={射影代数簇}/特征 **0** 代数闭域 k, 例如：$k = \mathbb{C}$.

♦ 光滑射影代数曲线=紧黎曼面（**Riemann surfaces**）；

- $C_1 \cong C_2 \Longleftrightarrow K(C_1) \cong K(C_2)$; **(**有理函数域同构**)**
- 亏格 $g(C) = 0, 1, 2, \cdots$
- 模空间 **(Moduli space)** M_g.

♦ 光滑代数曲面 (algebraic surfaces)—整个二十世纪双有理几何的宠物

问题背景–代数曲面

♦ 光滑代数曲面 (algebraic surfaces)—整个二十世纪双有理几何的宠物

♦ 代数曲面的研究轨迹：意大利学派、小平邦彦、Mumford、Bombieri、Beauville、肖刚、当今曲面学家....

问题背景–代数曲面

♦ 光滑代数曲面 (algebraic surfaces)—整个二十世纪双有理几何的宠物

♦ 代数曲面的研究轨迹：意大利学派、小平邦彦、Mumford、Bombieri、Beauville、肖刚、当今曲面学家....

♦ 代数曲面的研究方法：

- 双有理等价 (Birational equivalence)
- 双有理不变量 (Birational invariants)
- 模空间理论 (Moduli spaces)

♦ 从曲线到曲面的不变量演化：

Curves: g–(genus) $\Rightarrow$

$$\textbf{Surfaces}\begin{cases} K^2 \ \text{(canonical volume)} \\ p_g \ \text{(geometric genus)} \\ q \ \text{(irregularity)} \\ \chi(\mathcal{O}) \ \text{(Euler characteristic)} \end{cases}$$

♦ 高维双有理几何的起步:

- Ueno's book on high dimensional birational geometry (LNM 439, 1975);
- Reid's paper "Canonical 3-folds" in 1979;
- 森重文Mori (Annals of Math.,1982); Kawamata, Shokurov, ..., Mori (JAMS, 1988);
- "Minimal Model Program"—Mori's Field's Medal in 1990.

♦ 三维MMP ⇒ 三维极小模型上带有“终端奇点”(Terminal singularities)，统称 QFT 奇点。

♦ 三维MMP $\Rightarrow$ 三维极小模型上带有“终端奇点”(Terminal singularities)，统称 QFT 奇点。

♦ 终端奇点分两类：(I)、(II)。
类型(I)—循环商奇点 $\mathbb{C}^3/\mu_r$.
类型(II)—超曲面商奇点.

三维簇的离散不变量

♦ 三维MMP $\Rightarrow$ 三维极小模型上带有“终端奇点”(Terminal singularities)，统称 QFT 奇点。

♦ 终端奇点分两类：(I)、(II)。
类型(I)—循环商奇点 $\mathbb{C}^3/\mu_r$.
类型(II)—超曲面商奇点.

♦ (I) 型奇点：$\varepsilon \in \mu_r$，

$$\varepsilon \cdot (x, y, z) := (\varepsilon^{a_1} x, \varepsilon^{a_2} y, \varepsilon^{a_3} z).$$

♦ **(I) 型奇点** $\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) \equiv (1, -1, b)$**,**
$0 < b < r$**,** b **coprime with** r**.**

$$Q = \frac{1}{r}(1, -1, b) := (b, r).$$

$2 \times (b, r)$ 表示两个此类型奇点。

三维簇的离散不变量

♦ **(I)** 型奇点$\Rightarrow$ $(a_1, a_2, a_3) \equiv (1, -1, b)$, $0 < b < r$, b **coprime with** r.

$$Q = \frac{1}{r}(1, -1, b) := (b, r).$$

$2 \times (b, r)$ 表示两个此类型奇点。

♦ **Reid** $\Rightarrow$ 不必担心**(II)**型奇点**!**

♦ **(I) 型奇点**$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) \equiv (1, -1, b)$**,** $0 < b < r$**,** b **coprime with** r**.**

$$Q = \frac{1}{r}(1, -1, b) := (b, r).$$

$2 \times (b, r)$ 表示两个此类型奇点。

♦ **Reid** $\Rrightarrow$ **不必担心(II)型奇点!**

♦ 研究范围

$\mathbb{V} := \{$**Projective 3-folds with QFT singularities**$\}$

- **Kodaira's classification**

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{-\infty} \cup \mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3.$$

- **Kodaira's classification**

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{-\infty} \cup \mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3.$$

- $\mathbb{V}_{-\infty}$ 包含 **Fano 3-folds;**

三维簇的离散不变量

♦ **Kodaira's classification**

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{-\infty} \cup \mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3.$$

♦ $\mathbb{V}_{-\infty}$ 包含 **Fano 3-folds;**

♦ $\mathbb{V}_0$ 包括 **Calabi-Yau 3-folds、Abelian 3-folds** 等等**;**

♦ **Kodaira's classification**

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{-\infty} \cup \mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3.$$

♦ $\mathbb{V}_{-\infty}$ 包含 **Fano 3-folds**;

♦ $\mathbb{V}_0$ 包括 **Calabi-Yau 3-folds**、**Abelian 3-folds** 等等;

♦ $\mathbb{V}_3$ 包括一般型三维簇。

◆ **Reid's Riemann-Roch Formula:**
$\forall X \in \mathbb{V}$, $\exists!$ **basket of QFT datum**

$$B[X] = \{\frac{1}{r_i}(1, -1, b_i) | i = 1, ..., s\}$$

such that

$$\chi(\mathcal{O}_X(mK_X)) = \frac{1}{12}m(m-1)(2m-1)K_X^3 - (2m-1)\chi(\mathcal{O}_X) + l(m),$$

$$l(m) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j\bar{b}_i(r_i - j\bar{b}_i)}{2r_i}.$$

♦ **Reid's Riemann-Roch Formula:**
$\forall X \in \mathbb{V}$, $\exists!$ **basket of QFT datum**

$$B[X] = \{\frac{1}{r_i}(1, -1, b_i) | i = 1, ..., s\}$$

such that

$$\chi(\mathcal{O}_X(mK_X)) = \frac{1}{12}m(m-1)(2m-1)K_X^3 - (2m-1)\chi(\mathcal{O}_X) + l(m),$$

$l(m) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j\bar{b}_i(r_i - j\bar{b}_i)}{2r_i}$.

♦ **If** X **is smooth,** $B[X] = \emptyset$**.**

♦ $B[X]$ 不是双有理不变量！若 **X** 为极小，则记**Reid** 的奇点篮为 B_X.

三维簇的离散不变量

♦ $B[X]$ 不是双有理不变量！若 **X** 为极小，则记**Reid** 的奇点篮为 B_X.

♦ $\forall$ $X \in \mathbb{V}$ **and** X **minimal,**

(1) if X **is of general type,** B_X 为双有理不变量（奇点不变量）。

(2) if X **is** $\mathbb{Q}$**-Fano,** B_X 不是双有理不变量。

♦ $B[X]$ 不是双有理不变量！若 **X** 为极小，则记**Reid** 的奇点篮为 B_X.

♦ $\forall\ X \in \mathbb{V}$ **and** X **minimal,**

(1) if X **is of general type,** B_X 为双有理不变量（奇点不变量）。

(2) if X **is** $\mathbb{Q}$**-Fano,** B_X 不是双有理不变量。

♦ 问题：哪些数据可以唯一地确定双有理不变量？

♦ $\forall X \in \mathbb{V}$, X 有下列不变量：

- $p_g(X) := h^3(\mathcal{O}_X)$;
- $q_1 := h^1(\mathcal{O}_X)$;
- $q_2 := h^2(\mathcal{O}_X)$;
- $\chi(\mathcal{O}_X)$;
- $\mathbf{vol}(X)$;
- $P_m(X) := h^0(X, mK_X)$, $m \geq 2$;
- B_X — X 的极小模型上的奇点篮。**(General type case)**

♦ $\forall X \in \mathbb{V}$, X 有下列不变量：

- $p_g(X) := h^3(\mathcal{O}_X)$;
- $q_1 := h^1(\mathcal{O}_X)$;
- $q_2 := h^2(\mathcal{O}_X)$;
- $\chi(\mathcal{O}_X)$;
- $\mathrm{vol}(X)$;
- $P_m(X) := h^0(X, mK_X)$, $m \geq 2$;
- B_X — X 的极小模型上的奇点篮。(General type case)

♦ 哪些不变量可以确定其他不变量？

奇点篮的集合

♦ 设集合 $\mathbb{S}_0 := \{$奇点篮$\}$.

奇点篮的集合

- 设集合 $\mathbb{S}_0 := \{$奇点篮$\}$.
- 定义加权奇点篮 $\mathbb{B} := \{B, \chi_2, \chi\}$, $B \in \mathbb{S}_0$, $\chi_2, \chi \in \mathbb{Z}$.

奇点篮的集合

♦ 设集合 $\mathbb{S}_0 := \{$奇点篮$\}$.

♦ 定义加权奇点篮 $\mathbb{B} := \{B, \chi_2, \chi\}$, $B \in \mathbb{S}_0$, $\chi_2, \chi \in \mathbb{Z}$.

♦ 定义集合

$$\mathbb{S} := \{\mathbb{B} | \mathbb{B} \text{ 为加权奇点篮}\}.$$

♦ 设集合 $\mathbb{S}_0 := \{$奇点篮$\}$.

♦ 定义加权奇点篮 $\mathbb{B} := \{B, \chi_2, \chi\}$, $B \in \mathbb{S}_0$, $\chi_2, \chi \in \mathbb{Z}$.

♦ 定义集合

$$\mathbb{S} := \{\mathbb{B} | \mathbb{B} \text{ 为加权奇点篮}\}.$$

♦ **Reid** $\Rightarrow$ 存在映射:

$$\theta : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{S}_0.$$

♦ $\forall\ B \in \mathbb{S}_0$，记

$$B = \{(b_i, r_i) | 0 < b_i < r_i, b_i \textbf{ coprime to } r_i, i = 1, \cdots, s\}.$$

- $\forall\ B \in \mathbb{S}_0$，记

$$B = \{(b_i, r_i) | 0 < b_i < r_i, b_i \text{ coprime to } r_i, i = 1, \cdots, s\}.$$

- **Set** $\sigma(B) := \sum_i b_i$ **and** $\sigma'(B) := \sum_i \frac{b_i^2}{r_i}$**.**

♦ $\forall\ B \in \mathbb{S}_0$，记

$$B = \{(b_i, r_i) | 0 < b_i < r_i, b_i \text{ coprime to } r_i, i = 1, \cdots, s\}.$$

♦ **Set** $\sigma(B) := \sum_i b_i$ **and** $\sigma'(B) := \sum_i \frac{b_i^2}{r_i}$.

♦ **Let** $n > 1$ **be an integer. For each** i**, set** $l_i := \llcorner \frac{nb_i}{r_i} \lrcorner$ **and define**

$$\Delta_i^n := l_i b_i n - \frac{1}{2}(l_i^2 + l_i) r_i, (\text{非负整数})$$

Define $\Delta^n(B) = \sum_{i=1}^t \Delta_i^n$.

♦ 任取加权奇点篮 $\mathbb{B} = \{B, \chi_2, \chi\} \in \mathbb{S}$.

- 任取加权奇点篮 $\mathbb{B} = \{B, \chi_2, \chi\} \in \mathbb{S}$.
- $\mathrm{vol}(\mathbb{B}) := -\sigma + \sigma' + 6\chi + 2\chi_2$.

- 任取加权奇点篮 $\mathbb{B} = \{B, \chi_2, \chi\} \in \mathbb{S}$.
- $\mathbf{vol}(\mathbb{B}) := -\sigma + \sigma' + 6\chi + 2\chi_2$.
- $\chi_2(\mathbb{B}) = \chi_2$.

- 任取加权奇点篮 $\mathbb{B} = \{B, \chi_2, \chi\} \in \mathbb{S}$.
- $\mathbf{vol}(\mathbb{B}) := -\sigma + \sigma' + 6\chi + 2\chi_2$.
- $\chi_2(\mathbb{B}) = \chi_2$.
- $\chi_3(\mathbb{B}) := -\sigma(B) + 10\chi + 5\chi_2$.

♦ 对$m \geq 4$, $\chi_m(\mathbb{B})$ 归纳定义如下:

$$\chi_{m+1}(\mathbb{B}) - \chi_m(\mathbb{B}) := \frac{m^2}{2}(\mathbf{vol}(\mathbb{B}) - \sigma'(B)) - 2\chi + \frac{m}{2}\sigma(B) + \Delta^m(B).$$

♦ 对$m \geq 4$, $\chi_m(\mathbb{B})$ 归纳定义如下：

$$\chi_{m+1}(\mathbb{B}) - \chi_m(\mathbb{B}) := \frac{m^2}{2}(\mathbf{vol}(\mathbb{B}) - \sigma'(B)) - 2\chi + \frac{m}{2}\sigma(B) + \Delta^m(B).$$

♦ 当 $B = B_X$ (即几何奇点篮），$\chi = \chi(\mathcal{O}_X)$, $\chi_2 = \chi(\mathcal{O}_X(2K_X))$ 对 $X \in \mathbb{V}$, 则 $\mathbb{B}$ 的所有不变量与 X 的不变量完全一致。(Riemann-Roch Formula)

♦ 设

$$B = \{(b_1, r_1), (b_2, r_2), \cdots, (b_k, r_k)\},$$

称

$$B' := \{(b_1 + b_2, r_1 + r_2), (b_3, r_3), \cdots, (b_k, r_k)\}$$

是 B 的“挤压”，记为 $B \succeq B'$.

♦ 设

$$B = \{(b_1, r_1), (b_2, r_2), \cdots, (b_k, r_k)\},$$

称

$$B' := \{(b_1 + b_2, r_1 + r_2), (b_3, r_3), \cdots, (b_k, r_k)\}$$

是 B 的“挤压”，记为 $B \succeq B'$.

♦ “$\succeq$” 定义了 $\mathbb{S}_0$ 上的偏序关系。

♦ 设

$$B = \{(b_1, r_1), (b_2, r_2), \cdots, (b_k, r_k)\},$$

称

$$B' := \{(b_1 + b_2, r_1 + r_2), (b_3, r_3), \cdots, (b_k, r_k)\}$$

是 B 的“挤压”，记为 $B \succeq B'$.

♦ “$\succeq$” 定义了 $\mathbb{S}_0$ 上的偏序关系。

♦ 如果 $b_1 r_2 - b_2 r_1 = 1$, 我们称 $B \succeq B'$ 是一个基本挤压（*a prime packing*）.

♦ "$\succeq$" 可以自然地定义到集合 $\mathbb{S}$ 上。即

$$\{B, \chi_2, \chi\} \succeq \{B', \chi_2, \chi\},$$

如果 $B \succeq B'$.

♦ “$\succeq$” 可以自然地定义到集合 $\mathbb{S}$ 上。即

$$\{B, \chi_2, \chi\} \succeq \{B', \chi_2, \chi\},$$

如果 $B \succeq B'$.

♦ 我们需要研究 $\succeq$ 与不变量的协调关系。

♦ 挤压偏序的性质：

Lemma

Assume $\mathbb{B} = (B, \chi_2, \chi) \succeq (B', \chi_2, \chi) = \mathbb{B}'$. *Then:*

1. $\sigma(B) = \sigma(B')$, $\sigma'(B) \geq \sigma'(B')$;
2. *For all* $n > 1$, $\Delta^n(B) \geq \Delta^n(B')$;
3. $vol(\mathbb{B}) \geq vol(\mathbb{B}')$;
4. $\chi_m(\mathbb{B}) \geq \chi_m(\mathbb{B}')$ *for all* $m \geq 2$.

♦ 挤压偏序的性质：

Lemma

Assume $\mathbb{B} = (B, \chi_2, \chi) \succeq (B', \chi_2, \chi) = \mathbb{B}'$. *Then:*

1. $\sigma(B) = \sigma(B')$, $\sigma'(B) \geq \sigma'(B')$;
2. *For all* $n > 1$, $\Delta^n(B) \geq \Delta^n(B')$;
3. $vol(\mathbb{B}) \geq vol(\mathbb{B}')$;
4. $\chi_m(\mathbb{B}) \geq \chi_m(\mathbb{B}')$ *for all* $m \geq 2$.

♦ 下一个目标：如何应用这个性质？

Set $S^0 := \{\frac{1}{n} | n \geq 2\}$ and

$$\begin{aligned} S^5 &:= S^0 \cup \{\frac{2}{5}\}; \\ S^6 &:= S^5; \\ S^n &:= S^{n-1} \cup \{\frac{b}{n} \mid 0 < b < \frac{n}{2},\ b \text{ coprime to } n\} \end{aligned}$$

for all $n \geq 5$. Each set S^n gives a division of the interval $(0, \frac{1}{2}]$. Write $(0, \frac{1}{2}] := \bigcup_i [\omega_{i+1}^{(n)}, \omega_i^{(n)}]$. Let $\omega_{i+1}^{(n)} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$ and $\omega_i^{(n)} = \frac{q_i}{p_i}$ with q_{i+1} coprime to p_{i+1} and q_i coprime to p_i.

- $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = 1$

Let $B = \{(b_i, r_i) | r = 1, \cdots, t\}$. **For each** $B_i = (b_i, r_i) \in B$, **if** $\frac{b_i}{r_i} \in S^{(n)}$, **then we set** $\mathscr{B}_i^{(n)} := \{(b_i, r_i)\}$. **If** $\frac{b_i}{r_i} \notin S^{(n)}$, **then** $\frac{q_{l+1}}{p_{l+1}} < \frac{b_i}{r_i} < \frac{q_l}{p_l}$ **with** $\frac{q_s}{p_s} = \omega_s^{(n)}$ **for some** n **and** $s = l, l+1$. **In this situation, we can unpack** (b_i, r_i) **to** $\mathscr{B}_i^{(n)} := \{(r_i q_l - b_i p_l) \times (q_{l+1}, p_{l+1}), (-r_i q_{l+1} + b_i p_{l+1}) \times (q_l, p_l)\}$.

$$\mathscr{B}^{(n)}(B) := \sum_i \mathscr{B}_i^{(n)}.$$

Then $\mathscr{B}^{(n)}(B) \succeq B$ **for all** n.

- $\mathscr{B}^{(n-1)}(B) = \mathscr{B}^{(n-1)}(\mathscr{B}^{(n)}(B)) \succeq \mathscr{B}^{(n)}(B)$

for all $n \geq 1$**.**

$$\mathscr{B}^{(0)}(B) = \cdots = \mathscr{B}^{(4)}(B) \succeq \mathscr{B}^{(5)}(B) \succeq ... \succeq \mathscr{B}^{(n)}(B) \succeq ... \succeq B.$$

The step $\mathscr{B}^{(n-1)}(B) \succeq \mathscr{B}^{(n)}(B)$ **can be achieved by** $\epsilon_n = \Delta^n(\mathscr{B}^{(n-1)}) - \Delta^n(B)$ **successive prime packings. Note that** $\epsilon_n \geq 0$**.**

♦ **Set** $B^n := \mathscr{B}^{(n)}(B)$. 我们得到典范序列

$$B^0 = B^4 \succeq B^5 \succeq \cdots B^n \succeq \cdots \succeq B.$$

♦ **Set** $B^n := \mathscr{B}^{(n)}(B)$. **我们得到典范序列**

$$B^0 = B^4 \succeq B^5 \succeq \cdots B^n \succeq \cdots \succeq B.$$

♦ **Set** $\mathbb{B}^n := \{B^n, \chi_2, \chi\}$. **我们得到加权奇点篮的典范序列:**

$$\mathbb{B}^0 = \mathbb{B}^4 \succeq \mathbb{B}^5 \succeq \cdots \mathbb{B}^n \succeq \cdots \succeq \mathbb{B}.$$

♦ **Set** $B^n := \mathscr{B}^{(n)}(B)$. 我们得到典范序列

$$B^0 = B^4 \succeq B^5 \succeq \cdots B^n \succeq \cdots \succeq B.$$

♦ **Set** $\mathbb{B}^n := \{B^n, \chi_2, \chi\}$. 我们得到加权奇点篮的典范序列:

$$\mathbb{B}^0 = \mathbb{B}^4 \succeq \mathbb{B}^5 \succeq \cdots \mathbb{B}^n \succeq \cdots \succeq \mathbb{B}.$$

♦ 如何用其他不变量表示$\mathbb{B}^n$?

♦ **Let** $B^{(0)} = \{n^0_{1,2} \times (1,2), \cdots, n^0_{1,r} \times (1,r)\}$.

$$\begin{aligned}
&\sigma(B) = \sigma(B^{(0)}) = \sum n^0_{1,r}, \\
&\Delta^3(B) = \Delta^3(B^{(0)}) = n^0_{1,2} \\
&\Delta^4(B) = \Delta^4(B^{(0)}) = 2n^0_{1,2} + n^0_{1,3}
\end{aligned}$$

♦ **Let** $B^{(0)} = \{n^0_{1,2} \times (1,2), \cdots, n^0_{1,r} \times (1,r)\}$.

$$\begin{aligned} &\sigma(B) = \sigma(B^{(0)}) = \sum n^0_{1,r}, \\ &\Delta^3(B) = \Delta^3(B^{(0)}) = n^0_{1,2} \\ &\Delta^4(B) = \Delta^4(B^{(0)}) = 2n^0_{1,2} + n^0_{1,3} \end{aligned}$$

$$B^{(0)} \begin{cases} n^0_{1,2} = 5\chi + 6\chi_2 - 4\chi_3 + \chi_4 \\ n^0_{1,3} = 4\chi + 2\chi_2 + 2\chi_3 - 3\chi_4 + \chi_5 \\ n^0_{1,4} = \chi - 3\chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 - \chi_5 - \sum_{r\geq 5} n^0_{1,r} \\ n^0_{1,r}, r \geq 5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_5 \quad &:= \quad \Delta^5(B^{(0)}) - \Delta^5(B) = 4n^0_{1,2} + 2n^0_{1,3} + n^0_{1,4} - \Delta^5(B) \\ &= \quad 2\chi - \chi_3 + 2\chi_5 - \chi_6 - \sigma_5\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_5 \quad &:= \quad \Delta^5(B^{(0)}) - \Delta^5(B) = 4n^0_{1,2} + 2n^0_{1,3} + n^0_{1,4} - \Delta^5(B) \\
&= \quad 2\chi - \chi_3 + 2\chi_5 - \chi_6 - \sigma_5
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_5 := \sum_{r \geq 5} n^0_{1,r}.
$$

$\mathbb{S}$ 上的组合数学–典范序列

$$
\begin{aligned}
\epsilon_5 \quad &:= \quad \Delta^5(B^{(0)}) - \Delta^5(B) = 4n^0_{1,2} + 2n^0_{1,3} + n^0_{1,4} - \Delta^5(B) \\
&= \quad 2\chi - \chi_3 + 2\chi_5 - \chi_6 - \sigma_5
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_5 := \sum_{r \geq 5} n^0_{1,r}.
$$

$$
B^{(5)} = \{n^5_{1,2} \times (1,2), n^5_{2,5} \times (2,5), n^5_{1,3} \times (1,3), n^5_{1,4} \times (1,4), n^5_{1,5} \times (1,5), \cdots\}
$$

$\mathbb{S}$ 上的组合数学–B^n 的表示

$$B^{(5)} \begin{cases} n^5_{1,2} = 3\chi + 6\chi_2 - 3\chi_3 + \chi_4 - 2\chi_5 + \chi_6 + \sigma_5, \\ n^5_{2,5} = 2\chi - \chi_3 + 2\chi_5 - \chi_6 - \sigma_5 \\ n^5_{1,3} = 2\chi + 2\chi_2 + 3\chi_3 - 3\chi_4 - \chi_5 + \chi_6 + \sigma_5, \\ n^5_{1,4} = \chi - 3\chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 - \chi_5 - \sigma_5 \\ n^5_{1,r} = n^0_{1,r}, r \geq 5 \end{cases}$$

$$B^{(7)}\begin{cases} n^7_{1,2} = 2\chi + 7\chi_2 - 2\chi_3 + \chi_4 - 2\chi_5 - \chi_7 + \chi_8 + 3\sigma_5 - 2n^0_{1,5} - n^0_{1,6} \\ n^7_{3,7} = \chi - \chi_2 - \chi_3 + \chi_6 + \chi_7 - \chi_8 - 2\sigma_5 + 2n^0_{1,5} + n^0_{1,6} - \eta \\ n^7_{2,5} = \chi + \chi_2 + 2\chi_5 - 2\chi_6 - \chi_7 + \chi_8 + \sigma_5 - 2n^0_{1,5} - n^0_{1,6} + \eta \\ n^7_{1,3} = 2\chi + 2\chi_2 + 3\chi_3 - 3\chi_4 - \chi_5 + \chi_6 + \sigma_5 - \eta \\ n^7_{2,7} = \eta \\ n^7_{1,4} = \chi - 3\chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 - \chi_5 - \sigma_5 - \eta \\ n^7_{1,r} = n^0_{1,r}, r \geq 5 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_8 = \quad & -2\chi_2 - \chi_3 - \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_8 - \chi_9 - 3\sigma_5 \\
& +3n^0_{1,5} + 2n^0_{1,6} + n^0_{1,7}; \\
\epsilon_9 = \quad & -2\chi_2 - 2\chi_3 + \chi_4 + \chi_5 - \chi_7 + \chi_8 + \chi_9 - \chi_{10} - 3\sigma_5 + \eta \\
& +2n^0_{1,5} + 2n^0_{1,6} + 2n^0_{1,7} + n^0_{1,8}; \\
\epsilon_{10} = \quad & -5\chi_2 - \chi_3 + 2\chi_6 + \chi_{10} - \chi_{11} - 6\sigma_5 - \eta \\
& +5n^0_{1,5} + 4n^0_{1,6} + 3n^0_{1,7} + 2n^0_{1,8} + n^0_{1,9}; \\
\epsilon_{12} = \quad & -\chi - 5\chi_2 - 3\chi_3 + 2\chi_5 + \chi_6 - \chi_7 + \chi_8 + \chi_{12} - \chi_{13} - 8\sigma_5 + \eta \\
& +7n^0_{1,5} + 5n^0_{1,6} + 5n^0_{1,7} + 4n^0_{1,8} + 3n^0_{1,9} + 2n^0_{1,10} + n^0_{1,11}.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{S}$ 上的组合数学–B^n 的表示

$$
B^{(12)}\begin{cases}
n^{12}_{1,2} = 2\chi - 2\chi_3 + \chi_4 - 2\chi_5 - \chi_7 + \chi_8 + n^0_{1,5} + \eta - \zeta - \alpha \\
n^{12}_{5,11} = \alpha \\
n^{12}_{4,9} = \zeta - \alpha \\
n^{12}_{3,7} = 2\chi + 2\chi_3 - 2\chi_5 + 2\chi_7 - 2\chi_8 - \chi_{12} + \chi_{13} - 2\eta - \zeta + n^0_{1,5} \\
n^{12}_{5,12} = -\chi - 3\chi_3 + 2\chi_5 + \chi_6 - \chi_7 + \chi_8 + \chi_{12} - \chi_{13} + \eta - n^0_{1,5} \\
n^{12}_{2,5} = 2\chi + 4\chi_3 + \chi_4 - \chi_5 - 4\chi_6 - \chi_8 + \chi_9 - \chi_{12} + \chi_{13} \\
n^{12}_{3,8} = -\chi_3 - \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_8 - \chi_9 - \beta \\
n^{12}_{4,11} = \beta \\
n^{12}_{1,3} = 2\chi + 5\chi_3 - 2\chi_4 - 2\chi_5 - 2\chi_6 - \chi_8 + \chi_9 - \chi_{10} + \chi_{11} + 2n^0_{1,5} - \beta \\
n^{12}_{3,10} = -\chi_3 + 2\chi_6 + \chi_{10} - \chi_{11} - n^0_{1,5} - \eta \\
n^{12}_{2,7} = -\chi + 2\chi_3 - \chi_4 - 2\chi_6 + \chi_7 - \chi_9 - \chi_{10} + \chi_{12} + 2n^0_{1,5} + 2\eta + \zeta + \\
n^{12}_{3,11} = \chi - \chi_3 + \chi_4 - \chi_7 + \chi_9 + \chi_{11} - \chi_{12} - n^0_{1,5} - \zeta - \alpha - \beta \\
n^{12}_{1,4} = 4\chi_3 - 2\chi_5 + 2\chi_7 - \chi_8 - 2\chi_9 + \chi_{10} - \chi_{11} + \chi_{12} + n^0_{1,5} - 2\eta + 2\zeta - \\
n^{12}_{2,9} = -2\chi_3 + \chi_4 + \chi_5 - \chi_7 + \chi_8 + \chi_9 - \chi_{10} - n^0_{1,5} + \eta - \zeta \\
n^{12}_{1,5} = 2\chi_3 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_7 - \chi_8 - \chi_9 + \chi_{10} + 2n^0_{1,5} - \eta + \zeta
\end{cases}
$$

关键不等式：$\epsilon_n \geq 0$

♦ $\epsilon_{10} + \epsilon_{12} \geq 0 \Rightarrow$ **(***)**:

$$2\chi_5 + 3\chi_6 + \chi_8 + \chi_{10} + \chi_{12} \geq \chi + 10\chi_2 + 4\chi_3 + \chi_7 + \chi_{11} + \chi_{13}.$$

关键不等式：$\epsilon_n \geq 0$

♦ $\epsilon_{10} + \epsilon_{12} \geq 0 \Rightarrow$ **(***):**

$$2\chi_5 + 3\chi_6 + \chi_8 + \chi_{10} + \chi_{12} \geq \chi + 10\chi_2 + 4\chi_3 + \chi_7 + \chi_{11} + \chi_{13}.$$

♦ **If** $\chi_m \leq 1$ **for all** $m \leq 12$**, Inequality (***) implies** $\chi \leq 8$**.**

♦ **Question:** $\forall X \in \mathbb{V}_3$, X **minimal, when is** $\Phi_m := \Phi_{|mK_X|}$ **birational?**

♦ **Question:** $\forall X \in \mathbb{V}_3$, X **minimal, when is** $\Phi_m := \Phi_{|mK_X|}$ **birational?**

♦ **Known results:**

• **If** $B_X = \emptyset$, **then** Φ_m **is birational for** $m \geq 5$. **Wilson(**$m \geq 25$, **1980); Benveniste (**$m \geq 8$, **1984）；Matsuki (**$m = 7$, **1986); M. Chen(**$m = 6$, **1998); Chen-Chen-Zhang (**$m = 5$, **2007).**

• **If** $P_k \geq 2$, **then** Φ_m **is birational for** $m \geq 11k + 5$. **Kollár (1986)**

♦ **Chen-Chen (2007–2011)**

• **If** $P_k \leq 1$ **for** $2 \leq k \leq 12$ **and** $B_X \neq \emptyset$,

$$(***) \Rrightarrow \chi \leq 8, \ \ P_{13} \leq 6;$$

$$\Rrightarrow \mathbb{B} \text{ has finite possibilities.}$$

• Φ_m **is birational for** $m \geq 73$.

• **Chen-Chen (2015):** Φ_m **is birational for** $m \geq 61$ **and** $\mathrm{vol}(X) \geq \frac{1}{1680}$.

♦ **Chen-Chen (2008): $\mathbb{Q}$-Fano 三维簇的负典范体积的最佳下界“1/330”.**

♦ **Chen-Chen (2008):** $\mathbb{Q}$-**Fano** 三维簇的负典范体积的最佳下界“1/330”.

♦ **Chen-Chen-Chen (2011): Iano-Fletcher** 系列猜想的证明—完成带终端商奇点的加权完全交三维簇的完整分类。

♦ **Chen-Chen (2008): $\mathbb{Q}$-Fano** 三维簇的负典范体积的最佳下界“1/330”.

♦ **Chen-Chen-Chen (2011): Iano-Fletcher** 系列猜想的证明—完成带终端商奇点的加权完全交三维簇的完整分类。

♦ **Chen-Jiang （2015）：$\mathbb{Q}$-Fano** 三维簇的反典范几何—Φ_{-m} **is birational for** $m \geq 39$.

公开问题

♦ 映射 $\theta : \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ 是否满射？（地理学问题）

- 映射 $\theta : \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ 是否满射？（地理学问题）
- $\mathbb{S}$ 的不变量具有很奇特的分布规律，几何上如何解释？

公开问题

♦ 映射 $\theta : \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ 是否满射？（地理学问题）

♦ $\mathbb{S}$ 的不变量具有很奇特的分布规律，几何上如何解释？

♦ 如果 $\kappa(X) = 1$，2，能否得出有效分类？(改进 **Kollár** 和 **Mori** 的存在性结果)

主要参考文献

- J. A. Chen, M. Chen. An Optimal Boundedness on Weak Q-Fano 3-Folds, Adv. Math. (219) 2008, 2086–2104
- J. A. Chen, M. Chen. Explicit Birational Geometry of Threefolds of General Type, I, Ann. Sci. Ec Norm. Sup. (43) 2010, 365–394
- J. A. Chen, M. Chen. Explicit Birational Geometry of Threefolds of General Type, II, J. of Differential Geometry 86 (2010), 237–271

- J. J. Chen, J. A. Chen, M. Chen. Quasi-smooth Weighted Complete Intersections, J. of Algebraic Geometry 20 (2011), no. 2, 239–262
- J. A. Chen, M. Chen. Explicit birational geometry of 3-folds and 4-folds of general type (Part III), Compositio Mathematica, Doi: 10.1112/S0010437X14007817 (42 pages). ArXiv: 1302.0374
- M. Chen, C. Jiang, On the anti-canonical geometry of Q-Fano 3-folds, (to appear) Journal of Differential Geometry (45 pages). ArXiv: 1408.6349

非常感谢！