多复变漫谈

周向宇

中国科学院数学研究所

中国科学院华罗庚数学重点实验室

纪念华先生

华罗庚数学讲座, 2014年11月18日

习近平总书记在今年6月中国科学院、中国工程院两院院士大会上的讲话中所列举的新中国的科学成就：

- “两弹一星”
- 多复变函数论
- 陆相成油理论
- 人工合成牛胰岛素

华罗庚先生的多复变函数论的成果:

1950年回国后完成

获首届国家自然科学一等奖

被评价为“领先西方至少十几年”

华罗庚：中国多复变研究的开创者

华罗庚教授在工作

早期：多复变自守函数，与C.L. Siegel同期工作相比肩

回国后：典型域上的多复变函数论

open problem：construction of Cauchy-Szegö kernel on the unit ball

Dirichlet problem on the classical domains

构造出4 类典型域的各类核：Bergman 核（是 Bergman 度量（Poincaré 度量的高维推广）的势），Cauchy-Szegö 核，Poisson 核。

“从华罗庚获奖的书中知道，4维 Siegel 上半平面的 Bergman 核函数可以写成 1/det ImZ 的若干次方的形式，是一个多次调和函数。他的学生的学生周向宇在解决“扩充未来光锥管域猜想”的证明中，重要的一步就是要构造一个在扩充未来光锥管域的多次调和函数，要从上述函数出发。这一着如果不是华学派的弟子是难以想到的。”

（陆启铿：华罗庚敏锐的直觉惊人的技巧。中科院创新案例汇编。）

证明基于一系列重要观察、步骤，这一着是其中之一。用到华学派的矩阵技巧。该 Bergman 函数有类似 Lorentz 群作用的不变性。

华老的学生，中国科学院院士陆启铿教授

耄耋之年，勤耕不辍

- Lu, QiKeng：An inequality of the holomorphic invariant forms. Sci. China Math. 56 (2013);
- Lu, Qi Keng：On the curvature conjecture of Hua Loo-Keng. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 28 (2012);
- Lu, Qi-Keng：Poisson kernel and Cauchy formula of a non-symmetric transitive domain. Sci. China Math. 53 (2010);
- Lu, Qikeng：The conjugate points of CP^{∞} and the zeroes of Bergman kernel. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 29 (2009);
- Lu, QiKeng：Holomorphic invariant forms of a bounded domain. Sci. China Ser. A 51 (2008)

Kobayashi embedding: 有界域至无穷维复射影空间

Lu embedding: 有界域至无穷维Grassmann流形

发现全纯不变形式及其不等式关系（类似于Miyaoka-Yau不等式）

“fundamental inequalities for holomorphically invariant forms”

2013年获得《中国科学》优秀论文奖

多复变函数论：“数学中研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的分支学科”。

用范畴（category）的语言来说:
多复变：研究复解析范畴的学问。

这里，范畴的对象（objects）是复流形（乃至复空间），态射（morphisms）是复流形（乃至复空间）间的复解析映照。

Dieudonne：“是所有数学学科当中最深刻、最困难的理论之一”, in “The Work of Nicholas Bourbaki”, The American Math. Monthly, 1970

复变函数有几个关键词: 复数, 变量, 函数.

复数的引进

研究复数的动力来自三次方程的根式求解（16世纪）

高次方程的数值解：中国数学家的成就

- 唐朝的王孝通（由土木工程、水利工程等实际问题引入三次方程，并提出近似求解思想）：《缉古算经》
- 北宋贾宪发现“增乘开方法”，贾宪三角；
- 南宋秦九韶完成《数书九章》，发现“正负开方法”；

  提出一次同余式组的解法，比高斯早五百五十余年，被称为“中国剩余定理”（中国余数定理）

这些工作在西方的影响与伟烈亚力(Wylie)的传播有关.

Niccolo Fontana (Tartaglia), Gerolamo Cardano

三次方程约化为下面两种情形（练习）：

$x^3 + px = q;$

$x^3 = px + q$, where $p, q > 0$

Tartaglia-Cardano formula:

Cardano1545年发表“Ars Magna”(挥毫四年，管用千载）

解$x^3+px=q$

习知：$(u-v)^3+3uv(u-v)=u^3-v^3$

令$3uv=p, u^3-v^3=q$

$u^3, -v^3$ 是$y^2-qy-p^3/27=0$ 的根

$$x=u-v=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}+\sqrt[3]{-q/+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$$

解$x^3 = px + q$

习知：$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3$

令$3uv = p, u^3 + v^3 = q$

u^3, v^3 是$y^2 - qy + p^3/27 = 0$ 的根

$$x = u + v = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 - p^3/27}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{q^2/4 - p^3/27}}$$

例：$x^3 = 15x + 4$, $x = 4$ is obviously a solution.

然而从公式却出现虚数！

Tartaglia-Cardano公式回答Pacioli（帕乔利）在15世纪末名著中的著名难题

Bombelli写就“代数学”（1572）:
通过引入复数及其代数运算，解释如何用Tartaglia-Cardano公式得到解

要得到实根，却要绕道虚数

复数的发现者：Cardano
复数的引入者：Bombelli

Wallis用几何方法解释虚数

“imaginaire”（虚构的、想象中的）由René Descartes 引入（1637）; 虚数

不承认虚数: 牛顿, Napier,...

莱布尼茨（1646—1716）在1702年说：“犹如存在和不存在的两栖物”。”complex numbers are a fine and wonderful refuge of the divine spirit, as if it were an amphibian of existence and non-existence” .

1730年，棣莫弗提出棣莫弗公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

欧拉在1748年提出欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta; e^{i\pi} + 1 = 0$$

建立了三角函数和指数函数的关系

Euler引入符号i，广泛使用复数

吉拉德（Girard），欧拉，达朗贝尔猜想：代数基本定理（Gauss给出几个证明）

Girard引入sin, cos, ...

复数的代数结构：
加减乘除，乘法满足交换律、结合律，如同实数

开方运算封闭（代数封闭域），不同于实数

发展：四元数（失去交换律）、八元数（Cayley数）（失去交换律与结合律）

实数域上有限维可除代数，只能是实数域、复数域、四元数域、八元数域（Bott，Milnor）

实数域是有序域，而复数域非有序域；

维数不同

$\mathbb{R}^*$ 不连通，C^*连通

复数绝对值的乘积性质
两个两平方和数的乘积仍为两平方和数；

两个4平方和数的乘积仍为4平方和数(Euler);
对应四元数绝对值的乘积性质

两个n平方和数的乘积仍为n平方和数，当且仅当n=1,2,4,8

复数集有丰富的代数、几何、拓扑、解析结构：

复数：度量（距离），角度，长度，面积

开集，闭集，邻域。连续函数

最基本、最简单的复流形及复李群（现代数学基本研究对象）

多复变与复几何：复流形及其间解析映照

复整数（Gauss整数,最基本的代数数，是代数数论之滥觞），

分圆域（有理数域添加单位根而生成的数域）,代数数论之源头

互反律，类域论，代数数论

Gauss，Euler，Kummer，Kronecker，Dirichlet，Dedekind，...

Riemann ζ 函数， Euler product

The purely arithmetic theory of complex numbers as pairs of real numbers was introduced by W. Hamilton (1837).
He found a generalization of complex numbers, namely the quaternions, which form a non-commutative algebra

陈省身先生：复数的引进是数学史上的一件大事

Hadamard: 实域中两个真理之间的最短路程是通过复数域

变量

笛卡儿：“未知和未定的量”（17世纪）

中国：天元（李冶，13世纪），天元术，四元术（朱世杰）

宋元四杰：李冶、秦九韶、杨辉、朱世杰

把变量引进数学，成为“数学中的转折点”，形成“变量数学”

李善兰翻译: Algebra的特征（自韦达之后）乃是以符号“代”替（换）“数”字，故简称“代数”

函数:

变量间的关系; 分析学基本概念; 变化、运动的语言

李善兰翻译: 李善兰给出的定义是: “凡式中含天，为天之函数。”

“函”与“含”通用

早期研究者：奥雷姆，笛卡尔，费马

起源于对图形的轨迹的探讨；数与形间的桥梁；graph of a function

点动成形：曲线看做是动点的轨迹（路径）；
有限多的经典曲线 $\longrightarrow$ 无限多的任意曲线

数、形和函数构成数学基本研究对象

数与形是函数之特例

函数：algebraic notation; geometrical representation; physical laws

Stevin, Kepler, Galileo,...

函数（function）一词，由莱布尼茨17世纪引入（variable，constant，parameter)。牛顿用“fluent(流量)”

巴罗，格雷果里，伯努利兄弟，欧拉，达朗贝尔，傅里叶，柯西，黎曼，罗巴切夫斯基，狄利克雷，哈代，希尔伯特，...

集合间的对应；关系；运算；映射，变换，operator

极限：

分析学基本概念、思想、研究对象, 包括收敛、连续、微分和积分等共同出发点

中国古代极限思想：

名家惠施：“一尺之捶，日取其半，万世不竭”（见庄子《天下篇》），连续的观念（墨子：离散的观念）

刘徽：“割圆术”

Cauchy，Weierstrass等完善

极限论的基础–实数理论：Dedekind，Cantor，Weierstrass

数的概念的不断丰富

数学符号体系化

变量数学

解析几何，微积分

复变函数论

数的概念的演化：

自然数，基数，序数.

思想：一一对应，顺序

中国古代数学的贡献：

从结绳到符号表示：结绳，书契

问题：如何用少量符号表示所有数？

十进制，十、百、千、万等

十进位置制：算筹

中国创造十进位置制(decimal place value)之历史：

十进制，位置制萌芽：商代（甲骨文），十，百，千，万

十进位置制发展：西周（金文）

筹算：春秋战国
（筹，算两字出现在东周时期多部著作：《仪礼》，《老子》，《孙子》，《荀子》，《管子》）
六艺（礼、乐、射、御、书、数）之一

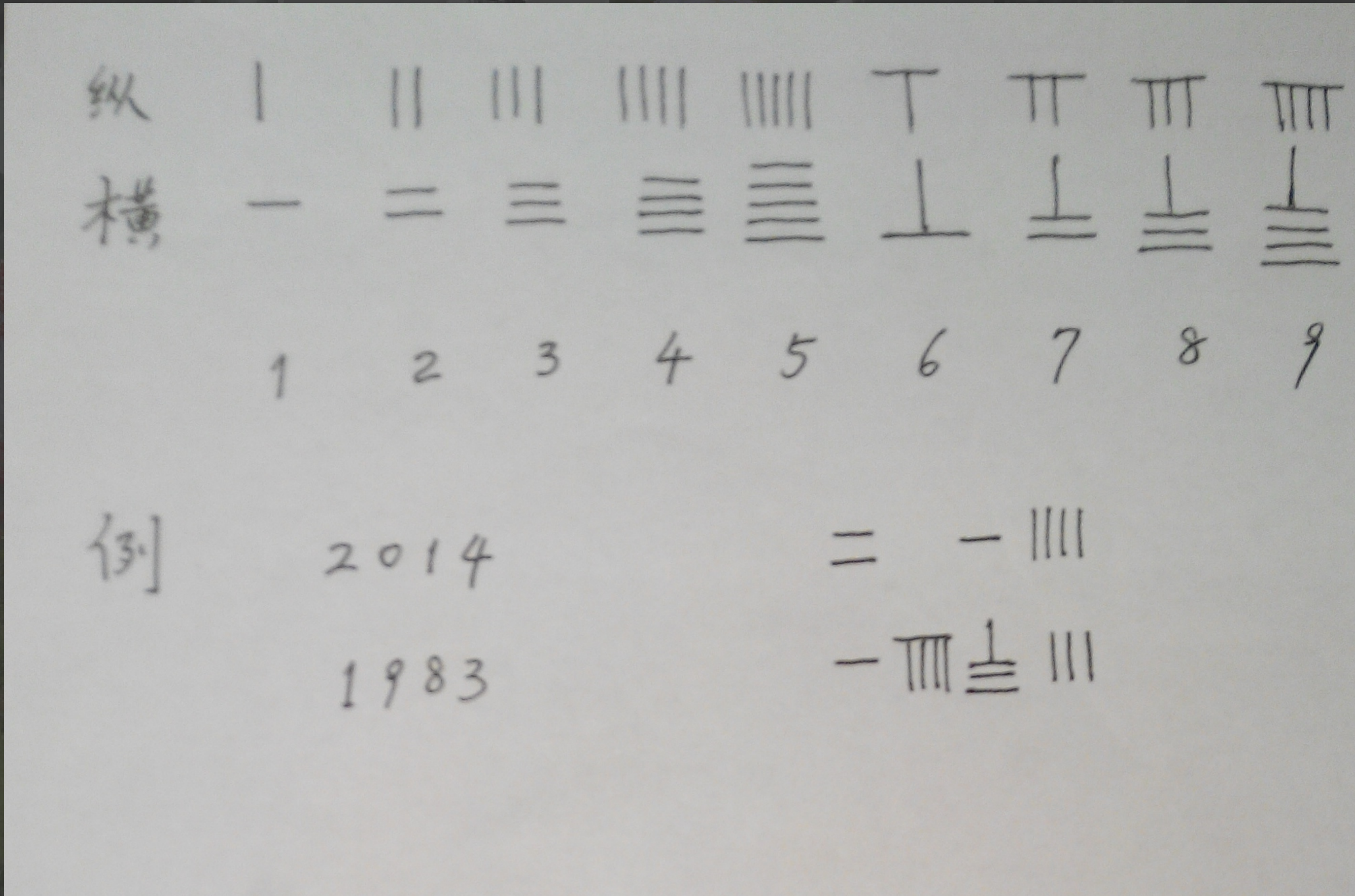
以筹计数

筹算可以进行整数和分数的加、减、乘、除、开方等各种运算，解方程等

《墨子·经下第四十一》：一少于二，而多于五，说在建位

孙子算经（公元4世纪）：算筹记数法表述非常明确
凡算之法：先识其位，一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当

筹算：乘除、开方、分数等计算（步骤与法则）
算盘：元明



以筹计数

数学测量工具：准、绳，规、矩

数学演算方法：筹算（用筹演算），“筹”的含义

准绳，规矩

中国古代数学与国学

中国文化对数学的严谨、严格、严密，准确、精确的尊崇

以法律为准绳

规规矩矩做人、做事

中国文化对数学思想、方法、能力的看重

筹算对中国语言的影响：

运筹帷幄，技高一筹,略胜一筹，一筹莫展，统筹，
筹款，筹办，筹备，筹措，筹划，筹集，筹建，筹借，
筹码，筹谋，筹拍，筹商，筹资，筹组，...

准确，准则，准时，准保，标准，水准，准点，准信，准数，对准，瞄准，保准，放之四海而皆准，…

绳之以法，绳愆纠谬，绳正

常规，规则，法规，清规戒律，萧规曹随，规范

循规蹈矩，不以规矩不能成方圆，
七十而从心所欲，不逾矩，
矩法（规矩法则），矩则（规章法则），矩设（按规矩设置），矩诲（以规矩教诲）

上策，献策，束手无策，出谋划策，策反，策应，策动，策划，

《周易·系辞下》："上古结绳而治，后世圣人易之以书契"

《易经》：二进位制

道生一，一生二，二生三，三生万物

善数，不用筹策

老子：三进位制

中国自有筹算起就有“0”之思想，即以空位表示“0”。

筹算中的零是位置零和运算结果的零

正负数（以颜色区分,或在数字最后一位加一根斜棍标示为负数），

运算规律：九章算术及其刘徽注

Laplace:

“从印度人那里，我们学到了用10个字母来表示所有数的聪明办法，这个聪明办法，除了赋予给每个符号以一绝对的值以外，还赋予了一个位置的值，这是一种既精致又重要的想法。这种想法看起来如此简单，而正因为如此简单，我们往往并未能足够认识它的功绩。但是，正由于这一方法的无比简单，以及这一方法对所有计算的无比方便，使得我们的算术系统在所有有用的创造中成为第一流的。至于创造这种方法是多么困难，则只要看看下面的事实就不难理解。这个事实是：这一发明甚至逃过了阿基米德与阿波罗尼斯的天才，而他们是古代两位最伟大的人物。”

The Princeton Companion to Mathematics: decimal place value

十进位值制在欧洲的普及、发展：

Stevin (十进分数）：3 ⓪ 1 ① 4②

Napier: 3.14

对数发明者

“看起来在数学实践中，最麻烦的莫过于大数字的乘法、除法、开平方和开立方，计算起来特别费事又伤脑筋，于是我开始构思有什么巧妙好用的方法可以解决这些问题。”

Vieta: $3^{\underline{14}}$, $3|14$

从数学的整体看复变函数

与几何、拓扑，代数，数论，代数几何，PDE，泛函分析，概率等方向的联系：

- 开映照定理，共形性
- Schwarz 引理：单位圆盘上 $f^*ds^2 \leq ds^2$，度量拉回，这里 ds^2 是 Poincaré 度量
- 共轭调和函数的存在性
- 代数拓扑的源泉之一：同伦，同调；黎曼映照定理，monodromy定理（解析延拓）

- 单值化定理：圆盘，Riemann球面，复平面（最简单对称空间）
- 解析延拓，多值函数：导致黎曼面
- Cauchy-Riemann方程，调和方程，Green函数
- 解析数论，椭圆函数、椭圆曲线，模形式，模曲线
- Dirichlet问题: 变分理论；Brown运动；一般马氏过程与现代位势论

复变函数各类核：柯西（Cauchy）积分公式（柯西核），单位圆上调和函数的泊松（Poisson）核。

从“虚幻”到“实用”

复变函数：大学理工科数学必学科目

庄子曰：“人皆知有用之用，而莫知无用之用也”（人间世）

Apollonius: 圆锥曲线，抛物线、椭圆、双曲线（李善兰译）

两千年后发现应用：行星运动规律

光学性质

椭圆：椭圆的透镜（某些截面为椭圆）有汇聚光线的作用（也叫凸透镜）：老花眼镜、放大镜和远视眼镜

抛物线: 各种探照灯、汽车远光灯、手电筒、射电望远镜、雷达天线、卫星天线、太阳能热水器、聚光灯

双曲线: 天文望远镜的设计等

拉格朗日猜想：五次以上方程无根式解

阿贝尔、伽罗华解决(which kind of equations can be solved via radicals)

平行公设问题：

Lambert猜想：存在非欧几何

Lobachevski，Bolyoi，Gauss解决

现实实现：Beltrami，Klein，Poincaré