

2007 中国科学院 优博论丛

白春礼◎主编



科学出版社
www.sciencep.com

目 录

几类弥散型非线性偏微分方程组的研究进展	郝成春	(1)
非阶化 Witt 型和 Block 型李代数的不可约表示	赵玉凤	(7)
信息网络拓扑结构与内容相关性研究	程学旗	(18)
非线性波动方程的间断有限元方法	徐 岩	(28)
北京谱仪实验中发现宽共振新粒子	庄胥爱	(40)
双势垒磁性隧道结的自旋相关输运研究	曾中明, 韩秀峰	(46)
机遇与挑战并存的多尺度生物传热	吕永钢	(55)
宽吸收线类星体及其共振电子散射研究进展	王慧元	(66)
线性标度电子结构方法的研究进展	向红军, 杨金龙	(79)
量子态隐形传输的研究进展	张 强	(93)
半导体微腔激光器和滤波器的研究	陈 沁	(103)
量子保密通信体系的研究进展	郭国平	(112)
分子尺度量子态探测与调控的扫描隧道显微学研究进展	赵爱迪	(124)
脆性块体金属玻璃的断裂行为研究	郝学奎	(133)
纳米材料与纳米器件的研究进展	付 磊	(146)
非黏性超疏水生物表面的研究进展	高雪峰	(158)
纳米材料的湿化学合成及新颖结构自组装构建的研究进展	孙旭平	(167)
量子点的合成及其应用研究进展	潘道成	(183)
PEMFC 甲醇自热重整制氢体系优化的研究进展	王 胜	(195)
分子折叠体的组装及其在分子识别研究中的应用	侯军利	(206)
有机小分子催化的直接 Aldol 反应	唐 卓	(218)
富营养化水系水陆交错带氮去除与生态效应研究	王洪君	(227)
蝙蝠携带冠状病毒的研究进展	李文东	(237)
果蝇学习记忆的研究进展	刘 刚	(247)
高等植物早期胚胎发生的分子调控机制	丁永和	(253)
蓝藻比较和进化基因组学研究进展	赵方庆	(263)
TRP 通道神经功能研究进展	贾怡昌	(276)
膜表面阿片肽受体的调控与吗啡耐受机制的研究进展	管吉松	(287)
NG2 胶质细胞特性及其功能的研究进展	戈鹄平	(298)
油菜素内酯及生长素在双子叶植物生长发育中的相互作用的研究进展	李 李	(309)
Nudel 在内膜系统运输及有丝分裂中的功能	郝 伟	(320)
高等植物的耐盐机制的研究进展	任仲海	(328)
Toll 类似受体信号通路及其调控的研究进展	王姪姪	(335)
自然奖赏与成瘾药物奖赏神经机制的比较研究——下丘脑神经肽食欲素的		

几类弥散型非线性偏微分方程组 的研究进展

郝成春

(中国科学院数学与系统科学研究院)

作者简介



郝成春,男,1977年2月出生于河北省南宫市。1999年及2002年分别在河北大学获得学士学位和硕士学位,随后在中国科学院数学与系统科学研究院攻读博士学位,2005年7月获得博士学位,指导教师为肖玲研究员。同年7月被中国科学院数学与系统科学研究院聘为助理研究员。2004年9月荣获中国科学院数学与系统科学研究院院长奖学金特等奖;2004年10月荣获中国科学院院长特别奖;2007年7月荣获中国科学院优秀博士学位论文奖。

目前主要研究方向为非线性发展偏微分方程,特别是几类弥散性非线性发展方程的适定性理论、渐近行为和散射理论,以及量子流体动力学模型及相关量子修正模型的适定性及各种渐近极限等重要问题,发表学术论文15篇。

E-mail: hcc@amss.ac.cn

本论文主要研究几类非线性发展偏微分方程(组)的数学理论和调和分析方法的应用,特别是非线性色散波方程的适定性理论、渐近行为和散射理论等重要问题。这类模型是理论物理、等离子体物理、光学和量子力学等领域中的重要模型,它们的研究与诸多领域有着密切的联系,在理论上也涉及到许多深刻而又困难的问题。

在色散波方程的研究方面,近些年来调和和分析方法得到了广泛的应用。1977年,Strichartz R^[1]用调和分析方法得到了线性波动方程的时空估计,这一基本估计在以后的非线性波动方程的研究中扮演着重要的角色。随后,有许多关于非线性 Klein-Gordon 方程和 nonlinear Schrödinger 方程(NLS)的问题相继用 Strichartz-型估计得以解决。1999年,Bourgain J^[2]用调和分析方法获得了临界 NLS 方程在初值属于能量空间 $H^1(\mathbf{R}^n)$ ($n=3,4$) 且为径向函数时的整体适定性,这也将 NLS 方程的研究推向了一个新的高度。2005年,Colliander J、Keel M、Staffilani G、Takaoka H 和 Tao T^[3]等充分利用了调和分析技巧,解决了三维临界 NLS 方程能量解的整体适定性和散射性理论等未解决的公开问题。这也使得非线性发展方程的研究进入一个新的阶段。在某种程度上,给其他类型的发展方程的研究提供了新的手段、方法和技巧。当然,在此领域中仍存在大量亟待解决的问题,如非线性 Schrödinger-Poisson 方程

组、高阶非线性 Schrödinger 方程等,在方法上需要结合调和分析技巧和方程自身的结构特点才能得以解决。

Schrödinger-Poisson 方程组是用来描述粒子的波函数所形成的系统。然而,这种描述是在自相似方式的假设下,对不能相互区别的自相互作用的粒子的整体效果的一种描述。这种相互作用是通过库仑(Coulomb)场,而这个库仑场本身又依赖于 Schrödinger-Poisson 方程组中的波函数,实际上给出了一个满足 Poisson 方程的自相似位势。这个位势就与 Schrödinger-Poisson 方程组中的波函数相耦合。在这种意义下,我们可以将这些方程组看做是平均场理论或是自相似理论。从物理上来看,Schrödinger-Poisson 方程组是对在诸如半导体设备(如共振管道的半导体整流组件和量子点等)、等离子体物理等中的量子效应的一种描述。从数学上来看,它的理论势必涉及非线性偏微分方程理论、拟微分算子、调和分析(通过 Wigner 变换的应用)和量子力学等的广泛应用。

关于 Schrödinger-Poisson 方程组的导出,现已有大量的方法和途径。比如,可以导出混合态单极 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{aligned} i\partial_t \Psi(t, x) &= -\frac{1}{2} \Delta \Psi + V(\Psi) \Psi, \\ \Psi &= (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ n(t, x) &= \sum_n \lambda_n |\psi_n(t, x)|^2, \\ \Delta V &= -n. \end{aligned} \quad (1)$$

若仅考虑单个粒子,即只有一个状态函数 $\psi(t, x)$ 时,称之为纯粹态单极 Schrödinger-Poisson 方程组。根据 ϵ 的符号,静电位势 V 大致可以分成两种情形: $\epsilon > 0$ 时称为排斥位势(repulsive potential);对 $\epsilon < 0$ 的情形称为吸引位势(attractive potential)。若考虑的是分别带有正负电荷的两组粒子,则称之为双极 Schrödinger-Poisson 方程组,退化到两个带相反电荷的单个粒子所形成的系统就可以用下面的模型,即双极 Schrödinger-Poisson 方程组来描述:

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi_j &= -\frac{\epsilon^2}{2} \Delta \psi_j + (q_j V + h_j(|\psi|^2)) \psi_j, \\ -\lambda^2 \Delta V &= |\psi|^2 - |\phi|^2, \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $\psi = \psi_j(t, x) (j = 1, 2)$ 表示波函数,描述在静电位势 $V = V(t, x)$ 作用下,粒子每一时刻在空间中的状态。 $V = V(t, x)$ 表示静电位势。非线性自相互作用位势 $h_j(s)$ 具有下列形式

$$h_j(s) = a_j^2 s^{\gamma_j}, \text{ 对 } s \geq 0 \text{ 及某个 } a_j > 0, \frac{2}{d} < \gamma_j < \alpha(d),$$

其中,若空间维数 $d \geq 3$,则 $\alpha(d) = 2/(d-2)$,若 $d = 1, 2$,则 $\alpha(d) = \infty$ 。由波函数 ψ 描述的粒子的电荷分别为 $q^1 = 1, q^2 = -1$ 。尺度变换后的 Planck 常数 ϵ 及尺度变换后的 Debye 长度 λ 由下式给出:

$$\epsilon^2 = \frac{\eta^2}{2m\kappa_B TL^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\epsilon \kappa_B T}{Nq^2 L^2},$$

其中 η 表示约化的 Planck 常数, m 是粒子的有效质量, κ_B 是 Boltzmann 常数, T 是温度常数, ϵ 是粒子运动所在介质的介电常数, q 为基本电荷, N 为粒子的特征密度, L 为粒

子外形的特征长度。将Poisson 方程(1)₄ 换成下列拟线性 Poisson 方程

$$-\Delta \cdot ((\varepsilon + \varepsilon |\Delta V|^2) \Delta V) = n - n^*, \quad (3)$$

我们称(1)₁~(1)₃ 和(3)为拟线性 Schrödinger-Poisson 方程组。其中 n^* 为与时间无关的掺杂分布函数,它可由捐赠者 n_d^+ 和接受者 n_A^- 来表示,即 $n^* = n_d^+ - n_A^-$, $\varepsilon + \varepsilon |\Delta V|^2$ 为与场 V 有关的电介系数。

关于混合态或纯粹态单极 Schrödinger-Poisson 方程组,已有大量文献可查。Brezzi-Markowich^[4]研究了1~3 维空间中具有 Dirichlet 边值条件的混合态单极 Schrödinger-Poisson 系统的初边值问题($\varepsilon=1$),在 Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$ 中证明了初边值问题整体解的存在性。另外,他们还对初值问题进行了研究,所不同的是将 Poisson 方程 $\Delta V = -n$ 换成了它的一个弱解^[5,6],即 $V(t, x) = (4\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} n(t, y) |x - y|^{-1} dy$,采用球域逼近的方法,即先证明对任意球均存在整体古典解,然后将球的半径趋于无穷大,从而得到在整个空间 $\mathbf{R}^3$ 上也存在整体古典解。Steinrück^[7]研究了一维纯粹态单极 Schrödinger-Poisson 系统(1)的初值问题,在假设静电位势 $V(x) = \int_{\mathbf{R}} |x - y| \overline{\varphi(y)} \varphi(y) dy$ 满足一定的条件下,得出了温和解在空间 $C([0, \infty); L^2(\mathbf{R}))$ 中的存在性。Illner-Zweifel-Lange^[8]研究了三维混合态单极 Schrödinger-Poisson 系统的初值问题($\varepsilon=\pm 1$),也是将 Poisson 方程(1)₄ 换成了它的一个弱解形式 $V(t, x) = \varepsilon(4\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} n(t, y) |x - y|^{-1} dy$,采用半群方法证明了在空间 H^2 中整体强解的存在性。Castella^[9]采用 Strichartz 估计等方法,建立了该 Cauchy 问题在空间 L^2 以及 H^m ($m \geq 1$ 为整数)中的整体适定性。另外,还有有界域上的初边值问题、稳态解、极限问题、特征值问题及误差估计等。

然而,关于拟线性 Schrödinger-Poisson 方程组和双极 Schrödinger-Poisson 方程组的研究只是近几年来才得到重视。Illner-Lange-Toomire-Zweifel^[10]采用 Galerkin 方法对1~3 维空间中单位方体上的拟线性 Schrödinger-Poisson 方程组的周期边值问题进行了研究,证明了在空间 H_{loc}^2 中整体周期强解的存在性,而未能处理具有 Dirichlet 边界条件的边值问题。Illner-Kavian-Lange^[11]讨论了拟线性 Schrödinger-Poisson 方程组的特征值问题,得出对于特征值问题存在无穷多解的论断。

对于双极 Schrödinger-Poisson 方程组的研究还相对较少, Jüngel-Wang^[12]在假设存在的条件下,研究了双极 Schrödinger-Poisson 方程组到可压 Euler 方程的极限问题。Cui-Jiang-Wang^[13]研究了三维空间有界开区域上具有两族粒子的 Schrödinger-Poisson 方程组,证明了整体古典解的存在唯一性。对于许多基本问题,诸如双极(或单极) Schrödinger-Poisson 方程组初值问题在分数阶 Sobolev 空间的适定性,在加权 Sobolev 空间中的适定性及长时间行为等还尚未得到解决。

本论文研究了双极 Schrödinger-Poisson 方程组的初值问题的适定性问题和散射理论以及拟线性 Schrödinger-Poisson 系统具有 Dirichlet 边界条件的初边值问题。对双极 Schrödinger-Poisson 方程组的初值问题,建立了初值属于 $H^s(\mathbf{R}^3)$ (s 为任意非负实数)时解的整体存在性^[14],推进了国际上原有的 s 只能为非负整数的相关结果。对具有非聚焦外力作用项的双极 Schrödinger-Poisson 方程组,将拟共形守恒律引入对该系统的研究,建立了初值问题的整体适定性以及大时间性态的结果,得到了对任意维数都成立的能量

守恒以及拟共形守恒律^[15],改进了国际上已有的相关工作。另外,为探讨双极 Schrödinger-Poisson 方程组的渐近行为,率先将散射算子理论引入到 Schrödinger-Poisson 方程组的研究中,建立了修正散射算子理论,得到了双极 Schrödinger-Poisson 方程组的初值问题的整体适定性及渐近性态的结果。^[16]以上结果所采用的方法均可以直接应用到单极的情形。关于拟线性 Schrödinger-Poisson 系统,本论文对具有 Dirichlet 边界条件的拟线性 Schrödinger-Poisson 方程组的初边值问题进行讨论^[17],这是国际上首次对 Schrödinger-Poisson 方程组在三维空间这一更具物理意义的情况进行此类初边值问题的研究,弥补了以往只对周期解的研究^[10]和仅对二维单极 Schrödinger-Poisson 方程组初边值问题的研究^[18]。

另外,从等离子体物理、非线性光学、流体力学的诸多问题(如在微波和等离子体激光热传导中振荡孤立子的不稳定性、在低压超音速中的 Langmuir 振荡、一维晶体的激发、超流 film 的振荡、Heisenberg 铁磁链的激发运动、具量子位势的 Schrödinger 方程等)提出了一类更为复杂的高阶非线性 Schrödinger 方程。比如,为了研究孤立波、不稳定性及破裂现象的高阶色散效应,Karpman V I^[19]引进了一类非线性 Schrödinger 方程

$$i\Psi + \frac{1}{2}\Delta\Psi + \frac{\gamma}{2}\Delta^2\Psi + f(|\Psi|^2)\Psi = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

在高阶 Schrödinger 方程的研究方面,目前在理论方面还比较缺乏,这方面的文献为数不多。Guo B L^[20]用积分估计和 Galerkin 方法证明了一类耦合的非均匀介质的四阶强非线性 Schrödinger 方程组整体广义解的存在性,并讨论了解的“blow up”问题。Segata^[21]对一维空间中的关于涡旋丝的四阶非线性 Schrödinger 方程的适定性进行了讨论。Ben-Artzi, Koch 和 Saut^[22]讨论了下列线性方程

$$i\Psi - \epsilon\Delta\Psi + \Delta^2\Psi = 0, \quad \epsilon \in \{-1, 0, 1\} \quad (5)$$

的基本解的精确时空衰减估计。Guo B L-Wang B X^[23]考虑了如下形式的非线性 Schrödinger 方程 Cauchy 问题的存在性及散射理论:

$$\begin{aligned} iu + (-\Delta)^m u + f(u) &= 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $m \geq 1$ 是一个整数。Pecher-von Wahl^[24]对于 $m \geq 1$ 的情形在空间维数 $n \leq 7m$ 的条件下,证明了的经典解的整体存在性。

采用现代分析方法,如局部光滑效应和极大函数估计方法,作者分别对含导数非线性项的一维^[25]和高维^[26]四阶非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题的适定性进行了研究。有效地避免了经典方法的束缚,同时也克服了高阶项所带来的困难,得到了用经典方法所不能得到甚至无法处理的结果。另外,高维的情形还囊括了聚焦及非聚焦的情况。

参 考 文 献

- [1] Strichartz R. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. Duke Journal of Mathematics, 1977, 44: 705~714.
- [2] Bourgain J. Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case. J. Amer. Math. Soc., 1999, 12: 145~171.

- [3] Colliander J, Keel M, Staffilani G, Takaoka H, Tao T. Global well-posedness and scattering in the energy space for the critical nonlinear Schrödinger equation in R^3 . to appear in Annals of Math.
- [4] Brezzi F, Markowich P A. The three-dimensional Wigner-Poisson problem : existence, uniqueness and approximation. Math. Methods Appl. Sci., 1991, 14 : 35~61.
- [5] Illner R, Zweifel P F, Lange H. Global existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson systems. Math. Methods Appl. Sci., 1994, 17 : 349~376.
- [6] Arriola E R, Soler J. Asymptotic behaviour for the 3-D Schrödinger-Poisson system in the attractive case with positive energy. Appl. Math. Lett., 1999, 12 : 1~6.
- [7] Steinrück H. The one-dimensional Wigner-Poisson problem and its relation to the Schrödinger-Poisson problem. SIAM J. Math. Anal., 1991, 22 : 957~972.
- [8] Illner R, Zweifel P F, Lange H. Global existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson systems. Math. Methods Appl. Sci., 1994, 17 : 349~376.
- [9] Castella F. L^2 solutions to the Schrödinger-Poisson system : existence, uniqueness, time behaviour, and smoothing effects. Math. Models Methods Appl. Sci., 1997, 7 : 1051~1083.
- [10] Illner R, Lange H, Toomire B, Zweifel P F. On quasi-linear Schrödinger-Poisson systems. Math. Methods Appl. Sci., 1997, 20 : 1223~1238.
- [11] Illner R, Kaviani O, Lange H. Stationary solutions of quasi-linear Schrödinger-Poisson systems. J. Diff. Eqns, 1998, 145 : 1~16.
- [12] Jüngel A, Wang S. Convergence of nonlinear Schrödinger-Poisson systems to the compressible Euler equations. Comm. Partial Diff. Eqns., 2003, 28 : 1005~1022.
- [13] Cui G, Jiang C, Wang Y. The global classical solution of the Schrödinger-Poisson problem. Adv. Math. (China), 2001, 30 : 259~268.
- [14] Hao C C, Li H L. On the initial value problem for the bipolar Schrödinger-Poisson systems. J. Partial Diff. Eqns., 2004, 17 : 283~288.
- [15] Hao C C, Hsiao L. Large time behavior and global existence of solution to the bipolar defocusing nonlinear Schrödinger-Poisson system. Quart. Appl. Math., 2004, 62 : 701~710.
- [16] Hao C C, Hsiao L, Li H L. Modified scattering for bipolar nonlinear Schrödinger-Poisson equation. Math. Model. Meth. Appl. Sci., 2004, 14 : 1481~1494.
- [17] Hao C C. The initial boundary value problems for quasi-linear Schrödinger-Poisson equations. Acta Math. Sci., 2006, 26B : 115~124.
- [18] Lange H, Zweifel P F. Mixed boundary-value problems for the two-dimensional Schrödinger-Poisson system. Rep. Math. Phys., 1997, 39 : 283~297.
- [19] Karpman V I. Stabilization of soliton instabilities by higher-order dispersion : fourth order nonlinear Schrödinger-type equations. Phys. Rev. E, 1996, 53 : R1336~R1339.
- [20] Guo B. The existence and nonexistence of a global solution for one class of the system of the strong nonlinear Schrödinger equations of fourth order (in Chinese with English summary). Appl. Math. A J. Chinese Univ., 1991, 6 : 173~182.
- [21] Segata J. Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation related to the vortex filament. Diff. Integral Eqns., 2003, 16 : 841~864.
- [22] Ben-Artzi M, Koch H, Saut J C. Dispersion estimates for fourth order Schrödinger equations. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 2000, 330 : 87~92.

- [23] Guo B , Wang B X . The global Cauchy problem and scattering of solutions for nonlinear Schrödinger equations in H^s . Diff . Integral Eqs . , 2002 , 15 : 1073~1083 .
- [24] Pecher H , von Wahl W . Time dependent nonlinear Schrödinger equations . Manuscripta Math . , 1979 , 27 : 125~157 .
- [25] Hao C C , Hsiao L , Wang B X . Wellposedness for the fourth order nonlinear Schrödinger equations . J . Math . Anal . Appl . , 2006 , 320 : 246~265 .
- [26] Hao C C , Hsiao L , Wang B X . Wellposedness of Cauchy problem for the fourth order nonlinear Schrödinger equations in multi-dimensional spaces . J . Math . Anal . Appl . , 2007 , 328 : 58~83 .