# 中国科学院暑假学校讲义: 群表示论的一些小知识

薛航

二零一九年八月十七日

# 一点废话

这是我 2019 年在中国科学院暑假学校的讲义. 注意, 是小知识, 不是冷知识. 我们只提及 (我们认为) 最要紧的内容. 另外, 这是讲义, 不是教科书, 所以充斥着大量口水话. 教科书嘛, 好书太多了, 我也没那本事能写得比别人好. 讲义的画风也不是很稳定, 时深时浅, 时快时慢, 时而逗比, 时而严肃. 表示论的小知识如同大雁般在天空飞过, 时而排成 S 形, 时而排成 B 形, 这也可以理解.

讲义大致分为两部分, 第一部分是有限群表示, 第二部分主要是紧群的表示. 在教学实践中我们用了七次课讲有限群, 四次课讲紧群, 最后一次课陈述 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 表示的基本结果. 详细的课程进度我们之后有记录.

有限群的部分我们主要讨论了半单性, 正则表示的分解 (即有限群的 Peter–Weyl 定理) 和诱导表示的构造. 这些内容都是标准的. 作为应用, 我们研究了有限域上二阶矩阵群的表示. 最后我们讨论了淡中忠郎重构定理, 即用表示范畴反过来构造出群. 虽然定理的证明很简单, 但这里的思想方法是学生不熟悉的, 所以在教学中我们重点强调定理到底说了什么, 而不是定理怎么证明. 整个第一部分内容可以作为本科生学完了基本的抽象代数之后的一门短课或者是读书班的材料. 在这里我们力求叙述简明扼要, 用最短的篇幅和最直接的逻辑路线讲述有限群表示的基本内容.

紧群的部分我们以 Peter–Weyl 定理为中心. 由于学生对拓扑群比较陌生, 这一部分的叙述风格较第一部分有些许不同. 我们依然力求简明, 但在最求简明的同时我们也尽量加上一些讨 (fèi) 论 (huà), 以求帮助大家理解. 我们也更强调例子, 有些地方我们甚至直接讲例子而对一般的理论避而不谈. 首先我们复习 Fourier 级数的相关理论, 并解释为什么它就是 $S^1$ 的表示论. 接下来是两节一般理论, 主要是证明 Peter-Weyl 定理和讨论抽象紧群上的 Fourier 级数理论. 接下来我们又回到例子, 用具体的群 SU(2) 理解和深化之前讲的定理. 我们最后讨论了紧群的淡中忠郎重构定理作为有限群同名定理的呼应, 但在教学实践中我们并没有讲授这个定理的证明.

作为课程的结尾, 我们陈述了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 表示的分类. 大部分的结论都没有证明 (也不可能在这么短的一门课里证明). 我们希望大家以此作为进一步学习的开端.

最后一节我们汇集了一些相对复杂一点的材料, 这些材料都被包装成了习题. 这些习题都是大家能用在课上学过的知识看懂的, 绝大部分也能用上课学过的知识做出来. 当然了, 做不出来也不要紧, 本来就难嘛. 留着慢慢想也不错.

我们的学生来自祖国大江南北, 大家为了一个共同的梦想来到北京, 在漫漫长夏享受着表示论的世界吹来的清风. 到了后来, 北京越来越热, 为了更凉快一点, 大家天天上课坐飞机甚至坐火箭, 只为了让风更大一点. 学生大部分大二或者大三, 一般来说学过一点抽象代数, 测度论, 复变函数, 部分学生听说过一点群表示论和泛函分析的皮毛. 我们用到的结果基本就是群论线性代数, 紧群的部分用到一些简单的泛函分析 (也就是用来说话方便). 只要大家学过群论和线性代数, 我们都欢迎来学习表示论. 这么多款表示论总有一款适合你.

最后我要提到一个值得警惕的现象. 学生们对我讲表示论的干货很多时候提不起兴趣, 不愿意自己动手做计算, 反而对抽象的没有内容的废话热情很高. 这要举出一些典型的例子. 先讲 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的时候觉得太具体没意思, 接着讲淡中重构定理的时候看到范畴论如何如何热情来了.

再者讲到群上做 Fourier 分析, Plancherel 公式的时候觉得这纯粹就是微积分没啥意思, 结果提到个群代数是 $C^*$-代数的时候两眼发光. 我并不是说喜欢抽象的东西不好, 而是说抽象的东西要用具体的实例来支撑. 抽象的工具要为具体的问题服务. 我们现在看到的这些抽象的数学, 它是好数学的原因不是因为它复杂抽象结构好看听上去高大上, 而是因为它能帮助我们解决之前我们搞不定或者搞起来繁琐不堪的问题, 或者是让我们能在更高的层次上洞察问题的本质. 大家都很崇拜 Grothendieck 大神, 他重写了整个代数几何的框架. 但我们一定要意识到, Grothendieck 重新做抽象的框架是为了解决代数几何中若干具体的问题, 特别的就是要跟 Weil 猜想这个在理论和实践上都有重大意义的问题刚正面. 所以大家要记住, 不能为抽象而抽象, 抽象一定要为具体的问题服务.

---

我们每次课一个半小时, 一周三次, 安排在周二四五上午, 下午有助教的辅导和教员的答疑. 课时共计十八小时. 学生极其优秀的质量和让人叹为观止的勤奋刻苦精神使得课程的进展非常顺利. 我在 University of Arizona 教书的时候有学生跟我说 You lecture like a rocket. 我想在这里我讲课的进度可能不只是火箭而是超级星际航行宇宙飞船吧. 我认为, 在正常的教学实践中, 速度大致放慢一半或者一多半是可行的. 再加入大量具体的例子操作给学生看那就是更好的. 某些 (我们都假设学生知道的) 预备知识或者背景知识也应该包含在正常的教学内容当中 (代数上的模, 范畴论, 简单的泛函分析等等). 这门课的内容作为大三或者大四一学期三十六或者四十八小时的数学专业选修课是合理的. 总结一下, 讲课的进度大致如下:

1. 有限群表示的定义, 半单性, 正则表示定理的陈述.
2. 特征标的定义, 正交性, 右正则表示的分解, 不可约表示维数.
3. 矩阵系数, 正则表示的分解; 两个定理: 不可约表示维数整除群的阶, Burnside 可解性定理.
4. 诱导表示, Frobenius 互反律, Mackey 子群定理.
5. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 群的结构, 抛物诱导表示.
6. 尖表示, 用 Weil 表示构造尖表示 (我们省略了分裂的情况, 也跳过了定理 4.4.2 之后关于迹的计算).
7. 有限群的淡中忠郎定理.
8. Hilbert 空间, 圆圈的表示和 Fourier 级数.
9. 紧群表示的基本事实, 不可约表示都是有限维的 (我们跳过了证明), Peter–Weyl 定理 (我们强调了定理的陈述并告诉学生如果没学过紧算子这个证明可以跳过去). Peter–Weyl 定理的证明大致花了半个小时.
10. 紧群上的调和分析. 我们重点强调用 Peter–Weyl 定理构造 $L^2(G)$ 的标准正交基.

11. SU(2) 的表示和调和分析. 我们跳过了 Weyl 积分公式的证明, 也没有过多的讨论轨道积分的性质. 也就是就事论事, 证出 Plancherel 公式, 强调它的重要性, 结束.

12. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散序列表示和酉主序列表示的构造, Plancherel 公式的陈述.

---

我们提一下关于学习的一些看法. 首先, 对于有志于学习数学的学生, 到了一定的程度 (取决于大家的天分, 但大致上以实变函数抽象代数为界), 再学新东西, 第一次就什么都弄明白是不太现实的. 其次, 也是恰恰到了这个阶段, 对于学习的要求也大大提升了, 一般来说, 它要求我们在短时间之内搞懂一门学问的核心内容. 这很难, 对不对?

问题来了, 什么叫学懂了? 我想强调一点, 至少是我认为很重要的一点, 把定理的证明都过一遍甚至记住它并不等价于真正意义上的懂. 我认为, 学习最要紧的是建立正确的直观, 正确直观的建立是学懂的标志. 什么是正确的直观? 我觉得意思应该是说当看到某个定义某个定理的时候, 脑袋里能本能地建立下面这些东西: 最具有代表性最能反映问题本质的例子, 定义或者定理的合理性 (为什么是这样定义而不是那样定义), 定义和定理的必要性 (为什么要做这样的定义或者是为什么要做这样的定理), 这个定理为什么是对的 (有没有什么哲学上的原因能解释这个定理) 等等. 举个小例子. 我们看到定理 "函数 Riemann 可积分当且仅当函数的间断点集是零测集" 的时候会想到什么? 下面是几个重要的方面:(1) 零测集的意思是说集合里的点不太多, 但这个条件又比可数稍微弱一点; (2) Riemann 可积分说明函数连续性不能太差, 这个定理给出了 "不能太差" 的准确意义, 所以它应该是对的; (3) Riemann 函数是一个在所有有理数点处间断无理数点连续的函数, 所以它是可以积分的. 你也许还能想到别的很多东西, 但我想说的是, 相对于这几样东西, 定理本身的证明并没有那么要紧.

要建立正确的直观无疑是有难度的. 而克服这些困难最终完成正确直观的建立需要的是大量的积累. 积累的不仅仅是知识, 还有例子. 在某种意义上, 例子就等价于直观, 直观是例子的内在本质, 例子是直观的外在表象. 在我们脑子里例子不足的时候, 建立直观是困难的. 所以我们要反复学习, 反复自己研究例子. 大家一定要亲自动手算例子, 看别人算例子那永远是别人的例子不是自己的. 这个就像看别人游泳自己永远也学不会. 只有自己下水扑腾或者喝几口水之后才可能学会游泳. 第一次学不懂算不出来不要紧, 甚至前几次学不懂算不出来也不要紧. 大家千万不要怀疑自己, 大家欠缺的仅仅是例子和经验的积累而已. 例子当然也是相对的. 今天抽象的内容明天就成了更抽象的内容的例子. 就如同矩阵可以作为线性方程组的抽象, 而矩阵本身又是更一般算子的具体例子. 有个很玄学的东西叫做数学成熟度. 我想, 脑子里的例子的丰富程度也算是数学成熟度的重要方面吧.

我们学习的过程中, 往往是靠着例子向前推进的. 碰到一个定义或者定理, 先举个例子给自己看看, 看看自己能不能举一个不那么平凡的例子. 正面的反面的例子都需要. 例子算多了自然就有了感觉. 比方说, 学习群, 我们首先问自己, 我们脑袋里有多个具体的群的例子? 我们对这些例子到底了解到什么程度? 比方说我们会碰到一个经典的结果: 最小的非交换单群是 $A_5$. 我们第一反应, 为啥? 先试试咯, 拿几个阶数比 60 小的群来试试. 然后我们发现, 随便试个什么例子, 总有这样那样的原因使得它不是非交换单群. 在试错的过程中你会碰到 Sylow 定理, 会碰到

关于 $p$-群的结果, 会碰到其他各种各样的小结论. 当你试了足够多的例子你觉得自己心理上已经能接受 "最小单群是 $A_5$" 的时候, 虽然你没看证明, 其实你已经基本上 "懂" 这个结论了, 因为你大体上已经知道别的群为什么不行. 又比方说, 学习 Galois 理论, 我们先看到了 Galois 理论的主定理. 这个时候就自己来试试手呗. 我们自己拿个方程来算算 Galois 群 (比方说 $x^3+x+1$ 的 Galois 群你会算吗?), 或者随便写个域扩张问问是不是 Galois 扩张? 能不能写下所有的中间域? 古人云: 书读百遍, 其义自见. 但那是古人的书,《古文观止》不知道会不会读上百遍就能秒懂. 学数学光读书百遍或许就没什么用了, 但例子算百遍绝对是有益的.

另一方面, 我们说了要快速抓住一门学问的核心内容. 怎么能快速的抓住一门学问的核心内容? 最简单的答案: 让懂行的人给你讲. 从别人那学习, 尤其是学习骨干内容, 是效率最高的方法. 对于这门课, 我尽我最大的努力去做那个懂行的人, 去给大家用尽可能简洁直接的方法描述表示论 (我认为) 最要紧的内容. 稍微复杂一点的答案: 把书读薄. 华罗庚告诉过我们, 读书要先读厚, 再读薄. 我想, 读厚的过程是算例子建立直观的过程, 读薄的过程是抓住主干内容的过程. 我们前面说的都是把书读厚的过程. 怎么把书读薄? 一个简单的练习是, 给你一个小时的时间, 讲讲一门学问最主要的内容. 最重要的研究对象是什么? 最要紧最本质的定理是什么? 这个定理为什么是对的 (注意这不是证明而是哲学)? 这时候我们就要去粗取精, 直捣黄龙, 一切问题只为核心服务. 我没有办法帮大家把书读厚, 如前所述, 那需要大家自己疯狂的努力. 我希望这门课能为把书读薄的过程做一点小小的贡献.

我离一名优秀的数学家和优秀的数学教师都还差得很远 (这里要隆重请出我的老师和各位师兄弟们, 我水平有限常常有愧对师门的感觉), 这让我对很多问题的认知或许不是最优的. 我的文学修养也十分有限, 写下的东西可能言不及义, 可能没法表达出我心里最本质的想法. 简言之, 就是语文和数学都没怎么学好. 不过不要紧, 这个世界上有学问和修养都远远高于我的人, 他们写过很多值得一读的东西. 这里强力推送两本书的前言:

1. Polya, Szego, 分析中的问题与定理. 这是经典中的经典. 习题恒久远, 一本永流传. 书的前言读起来让人爽得欲仙欲死.

2. 伍洪熙, 黎曼几何初步. 我不是几何学家无法评价这本书的内容, 但前言却让我读过不下十遍. 在我极其有限的阅读范围之内这是最优秀的中文数学书前言.

作为结尾, 我请出两本表示论教材.

1. Serre. 有限群表示.

2. Fulton, Harris. 表示论.

这两本书真是把书读厚和把书读薄的经典教案. Serre 的书就是薄, 言简意赅, 三言两语直指核心. 我最崇拜 Serre 写书, 简直要想把膝盖直接送给他老人家了. Serre 写书证定理如砍瓜切菜, 逻辑结构包装得精美绝伦, 各种困难仿佛瞬间灰飞烟灭. 当然这书太干了读快了容易噎. Fulton 和 Harris 的书就是厚, 没有什么内容的厚, 罗哩叭嗦婆婆妈妈说了一大堆废话. 这是把书读厚的经典: 里面全是例子! 全是例子! 全是例子! 例子带你爽到起飞!

很多同学都在问学完了这个课之后接下来学点什么. 这当然取决于你接下来想干什么. 不过总而言之言而总之, 有一些东西还是标准材料, 值得每个数学工作者掌握. 这方面最主要的恐怕就是两个: 紧李群的最高权表示理论和复半单李代数的分类及表示. 大家可以参考的读物有

1. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* 言简意赅.

2. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction.* 内容翔 (luō) 实 (suō), 写得也很清楚.

3. Sepanski, *Compact Lie Groups.* 内容很初等, 作为教材很不错.

非紧李群表示的入门也可以看看 Knapp 的书 *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples.* 这书接近八百页, 内容包罗万象, 当然也就只是入了个门. 这方面内容已经是现在研究的热门方向了, 建议大家在有了基本的感觉之后直接看论文找题目做. 两横一竖就是干!

对数论学家来说, $p$-adic 群的表示也很重要. 基本的内容大多是从 $\mathrm{GL}_2$ 开始学习. 标准教科书要么是 Jacquet–Langlands, 要么是 Bump. 当然了, 更一般更深刻教材是 Bernstein 大师 1992 年在 Harvard 的讲稿.

1. Jacquet, Langlands, *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$. 这书或者说它的作者太过于出名, 以至于大家都管这书叫 Jacquet–Langlands.

2. Bump, *Automorphic Forms and Representations.* 这书是标准教材. 一般被称为 Bump. 这个书错误颇多, 勉强能忍.

3. Bernstein, *Notes of lectures on Representations of p-adic Groups*, 在 Bernstein 的主页上可以找到. 我们说过要向大师学习, 这就是大师. Bernstein 大师的东西都很值得学习.

Jacquet–Langlands 和 Bump 都是自守表示的教材. 这当然是数论中最要紧的部分之一. 学自守表示的话读一本即可. 另外可以参考的是

1. Godement, *Notes on Jacquet–Langlands Theory.* 这个之前没有出版, 只是在 IAS 内部印刷, 最近终于由高教社正式出版. 它比 Jacquet–Langlands 原书内容少一些, 也更好读一些.

2. Gelbart, *Automorphic Forms on Adele Groups.* 这书在很长一段时间都是自守表示的标准教材, 流传甚广. 但是小错误极多, 排版印刷质量也很堪忧, 读起来非常酸爽 (至少我当年学的时候是这感觉).

表示论是一门很大很大的学问, 我只能提及一些我相对熟悉的部分. 更多的还有比方说几何表示论, 量子群, 范畴化等等. 表示论也与几何拓扑学, 数学物理等方向联系紧密. 这些都是我不了解的, 也没有能力向大家深入地解释. 想了解表示论概观, 大家可以仔细看看表示论大师中国科学院数学院院长席南华院士在暑假学校做的高屋建瓴的报告: 表示, 无处不在.

---

终于写完了, 前后耗时两个多月, 精疲力尽, 血槽完全耗空. 由于自身水平和眼界的局限, 讲义和课程的安排多有不周, 很多论题的处理也未必完善, 语言文字方面更是水平欠佳. 欢迎大家提出各种意见. 讲义没有仔细校对过, 使用时请务必谨慎, 另外恳请大家随时指出讲义中的小错漏和打印排版错误. 如果大家能从这个讲义或者是课上有所收获, 不管是不是数学上的, 我都会非常开心. 祝大家学习愉快. 至于具体学到了什么, 我们不做更多的过问.

最后感谢来课上捧场的所有老师们和同学们. 我要感谢 (姓氏拼音字母序) 胡永泉老师, 田野老师, 田一超老师和张寿武老师, 以及中国科学院数学所与晨兴数学中心的鼎力支持, 让这个暑假学校能够顺利举办. 特别的, 我要感谢暑假学校的总设计师张寿武老师. 张寿武老师以他的高瞻远瞩和穿越宇宙的深邃洞察力, 在宏观上总体设计了暑假学校的方案, 如同一盏明灯照亮了我们前进的方向. 我还要感谢田野老师一直以来给予我精神和物质上的各种支持和为我在工作上提供的各种便利. 在讲课的过程中, 田野老师在选材, 进度, 习题等方方面面提出了宝贵的看法; 在讲义成稿的过程中, 田野老师也一路提供了诸多的建议和意见. 在此深表感谢.

薛航<br>二零一九年八月十七日<br>北京晨兴数学中心

# 目录

# 1 一些基本常识

这里我们列举一些表示论的基本常识. 大家来热热身. 最好大家在参加暑假学校之前学习一下这些知识, 这样一方面熟悉一下基本的语言和套路, 另一方面我们讲课也会方便容易一些. 当然了, 没学习过也没有关系, 我 (自认为) 是一名优秀的教师 (不接受反驳), 会尽心尽力地把大家教懂.

## 1.1 表示论常识

学习建议:

1. Serre. 有限群表示第一章.

2. Fulton, Harris. 表示论第一部分.

下面我们还是回忆一下一些基本的定义, 顺便约定一下记号.

设 $G$ 是一个群, $V$ 是一个线性空间, 所谓 $G$ 在 $V$ 上的表示是指 $G$ 在 $V$ 上的一个线性作用, 也就是说对每一个 $g \in G$, 我们都给一个 $V$ 上的线性变换 $\rho(g)$ 满足 $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ 对所有的 $g_1, g_2 \in G$ 都成立. 换言之, $G$ 在 $V$ 上的表示是一个群同态 $G \to \mathrm{GL}(V)$. 这样的表示我们通常记为 $(\rho, V)$, 或者简单记为 $\rho$, 有时也简记为 $V$. 表示的维数就是 $V$ 的维数, 常常记为 $\dim V$ 或者 $\dim \rho$. 如果 $(\rho, V)$ 和 $(\tau, W)$ 是 $G$ 的表示, 他们之间的同态是一个线性映射 $f : V \to W$ 满足 $f(\rho(g)v) = \tau(g)f(v)$ 对所有的 $g \in G$ 和 $v \in V$ 都成立 (也就是说线性映射和群作用交换). 两个表示同构是指存在一个同态 $f$, 使得它是线性空间的同构. 同态的全体我们记为 $\mathrm{Hom}_G(V, W)$.

我们这里并没有指定 $V$ 到底是哪个域上的线性空间. 我们这门课只考虑 $V$ 是复线性空间的情况. 这样的表示一般叫复表示. 别的情况, 特别是 $V$ 是特征 $p > 0$ 域上的线性空间的情况是当前活跃的研究课题. 这种表示往往叫模 $p$ 表示.

所谓的 $V$ 的子表示 $W$ 是指 $W$ 是 $V$ 的 $G$ 不变子空间. 两个表示的直和是指线性空间做直和, 群 $G$ 在线性空间分块作用. 一个表示是不可约的是说它没有真不变子空间. 一个表示是半单的或者是完全可约的是说它能分解成不可约子表示的直和. 我们要注意, 这些定义对于有限维表示一般是合理的, 但如果表示空间是无限维的, 一般来说还需要有拓扑学上的考虑来保证得到我们想要的性质. 对我们这门课讨论的表示来说, 大部分是有限维的, 少数拓扑学上的考虑一般也比较简单. 这里暂时不表, 需要用到的时候再谈.

给定群 $G$, 考虑 $G$ 上全体函数形成的线性空间 $\mathbb{C}[G]$. 群 $G$ 作用在 $\mathbb{C}[G]$ 上有两个作用, 分别称之为左右正则作用, 定义如下. 设 $f \in \mathbb{C}[G]$, $g, x \in G$. 左正则作用 $(\mathsf{L}, \mathbb{C}[G])$ 定义为

$$(\mathsf{L}(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

右正则作用 $(\mathsf{R}, \mathbb{C}[G])$ 定义为

$$(\mathsf{R}(g)f)(x) = f(xg).$$

大家想想为什么是这样定义而不是别的, 比方说 $(\mathsf{L}(g)f)(x) = f(gx)$.

我们现在解释表示论的两个常规操作: 对偶和张量积.

设 $(\rho, V)$ 是一个表示, $V^\vee$ 是 $V$ 的对偶空间 ($V$ 上全体线性函数形成的空间), 那么 $G$ 在 $V^\vee$ 上有作用 $(\rho^\vee(g)l)(v) = l(\pi(g^{-1})v)$, $l \in V^\vee$, $g \in G$, $v \in V$. 这叫做 $V$ 的对偶表示 (或者叫逆步表示). 如果 $(\rho, V)$ 和 $(\pi, W)$ 是两个 $G$ 的表示, 那么 $G$ 作用在张量积 $V \otimes W$ 上, 这个表示我们记作 $\rho \otimes \pi$. 它由 $(\rho \otimes \pi)(g)(v \otimes w) = \rho(g)v \otimes \pi(g)w$ 给出. 我们有

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = (V^\vee \otimes W)^G, \quad \mathrm{End}_G(V) = (V \otimes V^\vee)^G.$$

这里上标 $G$ 表示取 $G$ 不变元素, 即 $G$ 的特征值等于一的特征子空间 (自己想想怎么证).

设 $(\rho, V)$ 是一个表示. 张量积 $V \otimes V$ 中由 $v \otimes w + w \otimes v$ 生成的子空间称为对称 (二次) 张量积, 记为 $\mathrm{Sym}^2 V$. 由 $v \otimes w - w \otimes v$ 生成的子空间称为反对称 (二次) 张量积, 记为 $\wedge^2 V$. 它们都是 $G$ 不变子空间, 从而也是 $G$ 的表示. 我们显然有

$$V \otimes V \simeq \mathrm{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V.$$

假设 $G$ 是有限群. 下面是几个基本的结果.

### 1.1.1 Schur 引理

如果 $(\rho, V), (\pi, W)$ 都是不可约表示，那么

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, & V \simeq W; \\ 0, & V \not\simeq W. \end{cases}$$

证明: 很简单, 如果有同态 $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, 那么 $\mathrm{Ker}\, f$ 和 $\mathrm{Im}\, f$ 都是 $G$ 不变子空间. 由不可约性 $f$ 要么是同构, 要么是零同态. 如果 $(\rho, V)$ 和 $(\pi, W)$ 同构, 我们不妨假设 $V = W$. 固定一个 $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$. 那么存在 $v \neq 0$ 使得 $\alpha(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$. 由于 $V$ 是不可约的, $\mathrm{Ker}(\alpha - \lambda \mathbf{1}_V)$ (自然是子表示) 要么是零, 要么是 $V$. 上面已经知道了他不是零, 所以一定是 $V$. 于是 $\alpha = \lambda \mathbf{1}_V$. 证毕.

### 1.1.2 引理

有限维表示 $(\rho, V)$ 上存在 $G$ 不变正定 Hermitian 二次型.

证明: 也很简单, 先在 $V$ 上随便取一个正定 Hermitian 二次型 $(-, -)$, 然后在群 $G$ 上做平均:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)v).$$

很容易就能证明这也是正定 Hermitian 二次型, 而且是 $G$ 不变的 (这就是为什么要在群上平均一下, 注意这里用到了 $G$ 是有限群的条件). 证毕.

这个引理常常被称为 Weyl 酉化技巧.

### 1.1.3 Mascheke 定理

有限维表示都是半单的.

证明: 更简单. 设 $(\rho, V)$ 是有限维表示, 如果 $\rho$ 不可约那就没啥好说的了. 若不然, $W$ 是真子表示. 取 $V$ 上 $G$ 不变正定二次型和 $W$ 在此二次型下的正交补 $W^{\perp}$. 那么 $W^{\perp}$ 也是真子表示, $V = W \oplus W^{\perp}$. 再用归纳法就搞定了. 证毕.

建议练习题:

1. 证明有限群的不可约表示都是有限维的.
2. 假设 $G$ 和 $H$ 都是有限群, $(\rho, V)$ 是 $G \times H$ 的不可约表示. 证明存在 $G$ 的不可约表示 $(\pi, W)$ 和 $H$ 的不可约表示 $(\sigma, U)$, 使得 $V \simeq W \otimes U$, $G \times H$ 的作用由下式给出: $\rho(g, h)(w \otimes u) = \pi(g)w \otimes \sigma(h)u$. 此时 $\rho$ 一般称为 $\pi$ 和 $\sigma$ 的外张量积, 记为 $\rho = \pi \boxtimes \sigma$.
3. 设 $G$ 是有限群, $V$ 是 $G$ 的 (有限维) 表示. 证明: 如果 $V$ 上存在一个 (非零)$G$ 不变对称双线性型, 那么 $\mathrm{Sym}^2 V$ 包含 $G$ 的平凡表示; 如果 $V$ 上存在一个 (非零) $G$ 不变反对称双线性型, 那么 $\wedge^2 V$ 包含 $G$ 的平凡表示. 如果进一步假设 $V$ 是不可约的, 那么反之亦然.
4. 证明 abel 群的不可约表示一定是一维的. 证明任何群 $G$ 的一维表示一定通过 $G^{\mathrm{ab}}$ 分解.
5. 证明二面体群的不可约表示要么是一维的要么是二维的. 由此分类二面体群所有的不可约表示 (不要到处查书, 没意思, 就用定义手工搞, 一波常规操作搞定)

## 1.2 泛函分析常识

我们不打算花篇幅解释泛函分析的一些基本知识, 只给出一些学习的建议和最重要的定理.

学习建议: 测度论想必大家都学过了, 复习一下就好. Haar 测度可以参考冯绪宁和黎景辉《拓扑群引论》. 紧算子的谱定理可参考林源渠张恭庆《泛函分析》第四章 (学不明白想想有限维对称矩阵的谱定理). 不要被吓到了, 其实你需要的仅仅是几个定义而已.

1. Haar 测度指的是一个局部紧拓扑群上左平移不变 (或者右平移不变) 的测度. 这样的测度在差一个 (正) 常数的意义下是唯一的. 在紧群上和 abel 群上左不变测度一定是右不变的. 你只需要知道这件事情就可以了. 不要看证明, 完全没用.
2. 紧算子 (有限秩算子的极限) 和全连续算子 (把定义域中的弱收敛变成值域中的强收敛). 如果定义域是 Hilbert 空间, 那么紧算子等价于全连续算子. Hilbert 空间上自伴随紧算子的谱定理: 空间是特征子空间的完备直和, 特征值只能以 0 为凝聚点, 不为零特征值的特征子空间都是有限维的. 定理的证明也很简单, 大家想想对称矩阵的特征值分解是怎么证出来的. 其中一个做法是用 Rayleigh 商. 这个办法搬到 Hilbert 空间上也行得通.

建议练习题:

1. 熟悉几个常见的拓扑群, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, etc. 这里面那些群是紧的? 你能具体写下这些群上的 Haar 测度吗?

2. 证明 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e^{2\pi inx}$, $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e^{2\pi inx}$. 提示: 这是 Fourier 分析中两个重要定理的豪华版, 先搞清楚每个等式左边用的是什么拓扑.

3. 设 $G$ 是一个紧拓扑群. 考虑 $G$ 上的连续函数空间 $C(G)$ 和平方可积函数空间 $L^2(G)$. 给定 $\varphi \in C(G)$. 证明卷积算子 $L^2(G) \to C(G)$

$$f \mapsto \left( x \mapsto \int_G \varphi(g) f(g^{-1}x) \mathrm{d}g \right)$$

是紧算子 (利用 Arzela–Ascoli 定理). 如果 $\varphi$ 取实数值, 满足 $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$, 那么进一步证明卷积算子在 $L^2$ 内积下是自伴随算子.

## 1.3 主要结果

表示论的主要任务是什么?

1. 给定群, 分类所有的表示. 或者至少分类我们关心的那些表示, 比方说酉表示. 是不是想到了被有限单群分类支配的恐怖! 什么叫分类? 基本上是说把表示的信息全息转化成别的我们觉得可能更容易的信息. 简单的手法是把表示的信息转化成群结构的信息, 比方说群上共轭类的信息. 事实上, 群的共轭类和和表示的等价类是互为表里的, 两者所传递出来的信息在某种意义上来说等价的. 研究这种等价性是群论和表示论的重要组成部分. 通过研究群的共轭类我们可以理解表示的信息. 反过来, 如果我们能对表示说很多话, 那么我们也就对群的结构有了更深刻的认识.

2. 给定群上的某个具体的表示, 将它分解成不可约表示的直和 (不一定能做到, 做不到的话问合成列等等). 随便给个群, 最重要且具体的表示能有什么呢? 基本上就一个: 正则表示! 我们这门课要花不小的力气研究正则表示. 如果 $G$ 有一个性质比较特别的子群 $H$, 那么我们还可以研究 $H\backslash G$ 上的连续函数空间, $G$ 在上面通过右平移作用. 所谓的自守表示大致就是这种情况. 最简单的例子是 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

我们列举几个暑假学校将要学习的主要结果供大家欣赏.

### 1.3.1 定理: 有限群的正则表示

设 $G$ 是有限群. 那么作为 $G \times G$ 表示, 我们有分解

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee,$$

其中 $\pi$ 过遍 $G$ 所有不可约表示. 群 $G$ 不可约表示的个数等于 $G$ 上所有共轭类的个数.

主要的工具是有限群的特征标理论.

### 1.3.2 紧群的 Peter–Weyl 定理

设 $G$ 是紧群. 那么作为 $G \times G$ 表示, 我们有分解

$$L^2(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi}} \pi \otimes \pi^{\vee},$$

其中 $\pi$ 过遍 $G$ 所有不可约表示. 群 $G$ 上的任何连续函数都可以用不可约表示的矩阵系数的线性组合一致逼近. 想想如果 $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 这个定理在说啥?

我们主要利用紧算子的谱定理.

### 1.3.3 小例子: 有限域上的二阶矩阵群

对于群 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, $2 \nmid q$, 我们先定个小目标: 具体构造出所有的不可约表示. (对于 $q = 3, 5, 7$, 大家可以想想怎么做, 先把这些群到底长什么样搞清楚, 比方说有多少共轭类?)

我们主要的工具是有限群的 Weil 表示. 在此过程中我们也将学习诱导表示和 Mackey 理论.

### 1.3.4 小例子: 紧致二阶矩阵群

对于群 $G = \mathrm{SU}(2)$, 我们构造它的所有表示, 计算所有的特征标, 在研究清楚 $G$ 上的 Fourier 分析. 这里最要紧的结果是 Plancherel 公式. 这个公式可以直接利用表示的构造证明.

### 1.3.5 小例子: 非紧二阶矩阵群

对于群 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 我们构造了一些无穷维不可约表示, 并陈述它的 Plancherel 公式. 我们的主要目的是给今后的学习和研究开一个头, 告诉大家群表示研究的基本目标.

# 2 有限群的特征标

我们在这一节讨论有限群的特征标理论. 这是有限群表示论最有力的工具之一.

这一节我们总假设 $G$ 是一个有限群.

## 2.1 正交关系

设 $(\pi, V)$ 是 $G$ 的表示, 我们定义 $\pi$ 的特征标 (character) 为 $G$ 上的函数

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{Trace}(\pi(g)).$$

特征标的重要意义在于, 把抽象的代数转化成了具体的计算问题. 这样就爽到了.

所谓特征标的次数指的是 $V$ 的维数. 一次特征标等价于 $G$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的同态.

注意, 我们很多时候会谈论 abel 群的特征. 这个时候特征特别的是指从 abel 群到 $\mathbb{C}^\times$ 的同态. 大家可以观察到实际上这里的特征等价于 abel 群不可约表示的特征.

特征标有一些简单的性质, 比方说

1. $\chi_{\pi\oplus\sigma} = \chi_\pi + \chi_\sigma$, $\chi_{\pi\otimes\sigma} = \chi_\pi \cdot \chi_\sigma$.

2. $\chi_{\pi^\vee}(g) = \overline{\chi_\pi(g)} = \chi_\pi(g^{-1})$.

3. $\chi_\pi(1) = \dim V$.

4. 特征标是 $G$ 上共轭类的函数 (这种函数称为类函数), 即对于任意 $g, h \in G$, 有

$$\chi_\pi(h^{-1}gh) = \chi_\pi(g).$$

### 2.1.1 引理

记号同上. 令 $V^G = \{v \in V \mid \pi(g)v = v\}$. 那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\pi,V}(g) = \dim V^G.$$

证明: 考虑线性变换 $T : V \to V$,

$$T = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g).$$

则 $T^2 = T$, $V^G$ 是 $T$ 特征值等于 1 的特征子空间. 后面不需要我说怎么证了吧 (意思当然是说请大家自己劳动一下). 证毕.

所谓的特征标正交关系, 指的是下面的定理.

### 2.1.2 定理

设 $\pi, \sigma$ 是 $G$ 的不可约表示. 那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)} = \begin{cases} 1 & \pi \simeq \sigma; \\ 0, & \pi \not\simeq \sigma. \end{cases}$$

证明: 证明很简单. 我们有

$$\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)} = \sum_{g\in G}\chi_{\pi\otimes\sigma^\vee}(g) = \sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(\sigma,\pi)}(g) = \dim \mathrm{Hom}_G(\sigma, \pi).$$

用 Schur 引理就搞定了啊, 亲! 证毕.

请大家想一下如果 $G$ 是交换的这个定理是什么意思.

### 2.1.3 推论

设 $\pi$ 是 $G$ 的表示, $\sigma$ 是 $G$ 的不可约表示. 则 $\sigma$ 在 $\pi$ 中的重数等于

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)}.$$

特别的, $\pi$ 不可约当且仅当

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\pi(g)\overline{\chi_\pi(g)} = 1.$$

建议练习题.

1. 证明如果 $G_i$, $i = 1, 2$ 是有限群, $(\rho_i, V_i)$ 是 $G_i$ 的表示, 那么 $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ 不可约当且仅当 $\rho_1$, $\rho_2$ 均不可约.

## 2.2 正则表示: 初次见面, 请多多关照

记 $\mathbb{C}[G]$ 为 $G$ 上所有函数生成的线性空间. 我们考虑群 $G$ 在上面的右正则作用, 记之为 $(\mathsf{R}, \mathbb{C}[G])$. 一个简单的观察是:

$$\chi_{\mathsf{R}}(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1. \end{cases}$$

所以利用推论 2.1.3, 很容易得到以下结果.

### 2.2.1 推论

作为 $G$ 的表示, 我们有

$$(\mathsf{R}, \mathbb{C}[G]) \simeq \bigoplus_{(\pi,V)} (\dim V)(\pi, V),$$

其中 $(\pi, V)$ 过遍 $G$ 的所有不可约表示. 比较两边的维数我们有

$$\sum_{(\pi,V)} \chi_\pi(1)^2 = \sum_{(\pi,V)} (\dim V)^2 = |G|.$$

最后这个等式给出了不可约表示维数的重要限制. 显然, 这个等式告诉我们只有有限多个不可约表示. 好了, 到底有多少个呢?

建议练习题.

1. 证明群 $G$ 是交换的当且仅当所有的不可约表示都是一维的.

2. 假设群 $G$ 包含一个指数 $m$ 的 abel 子群, 那么 $G$ 的不可约表示维数不超过 $m$.

## 2.3 共轭类和表示

我们记 $\mathrm{cf}(G)$ 为 $G$ 上所有类函数组成的线性空间 (维数当然等于共轭类的个数!). 在类函数空间上我们可以定义内积

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \sum_C \frac{|C|}{|G|} \chi(C)\overline{\psi(C)}.$$

最后一个等式里 $C$ 过遍所有的共轭类.

我们的目标是证明下面这个定理.

### 2.3.1 定理

集合

$$\{\chi_\pi \mid \pi \text{ 是 } G \text{ 的不可约表示}\}$$

是 $\mathrm{cf}(G)$ 的一组标准正交基.

证明: 前面的讨论已经说明 $\chi_\pi$ 相互正交, 我们只需要说明所有的类函数都是特征标的线性组合, 也就是说如果对所有的不可约表示 $\pi$ 都有 $\langle f, \chi_\pi \rangle = 0$, 那么 $f = 0$.

现在假设 $f$ 是这样的函数. 对于任意的不可约表示 $(\rho, V)$ 我们考虑

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g) : V \to V.$$

由于 $f$ 是类函数, 我们有 $\rho_f \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 它的迹等于 $|G|\langle f, \chi_{\rho^\vee} \rangle$. 于是 $\rho_f = 0$.

另一方面, 令 $\rho = \mathsf{R}$ 为右正则表示, 那么

$$\mathsf{R}_f = \bigoplus_{(\pi,V)} \dim V \cdot \pi_f = 0$$

由于 $\mathsf{R}_f([1]) = \sum_{g \in G} f(g)[g] = 0$, 我们得到 $f = 0$. 证毕.

现在同一个空间上有了两组基, 大家想想这两组基之间的转移矩阵是什么?

建议练习题.

1. 设 $g \in G$. 证明 $g$ 和 $g^{-1}$ 共轭当且仅当对于任意的不可约表示 $\pi$ 都有 $\chi_\pi(g) \in \mathbb{R}$.
2. 对于一般的 $g, h \in G$, 你能用不可约表示的特征标刻画 $g$ 和 $h$ 是否落在同一个共轭类中吗?

### 2.4 特征标表

设 $C_1, \cdots, C_n$ 是 $G$ 上所有的共轭类, $\chi_1, \cdots, \chi_n$ 是 $G$ 所有不可约表示的特征标, 一个 $n \times n$ 数表, 其中 $i$ 行 $j$ 列等于 $\chi_i(C_j)$, 被称为 $G$ 的特征标表.

表中的行满足正交关系

$$\sum_{j=1}^{n} |C_j| \chi_i(C_j) \overline{\chi_{i'}(C_j)} = \delta_{i,i'} |G|.$$

由此可以得到列也满足正交关系

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i(C_j) \overline{\chi_i(C_{j'})} = \delta_{j,j'} \frac{|G|}{|C_j|}.$$

(想想怎么从行的正交关系变变形得到哦!)

由此我们可以算出很多群的特征标表.

#### 2.4.1 例子

麻烦大家上网搜搜特征标表, 研究一下这些群的特征标表是怎么算出来的: $S_3$, $S_4$, $A_4$, $A_5$, $D_n$. 大体步骤如下: (1) 先分析共轭类 (2) 再写下一些显而易见的表示 (一维的两维的等等)(3) 用正交关系和维数关系把表算出来. 这个算会了特征标的基本理论就差不多懂了.

这就不操作给大家看了, TeX 打起来太麻烦了, 我懒.

建议练习题.

1. 视特征标表为矩阵, 求行列式的绝对值. 行列式怎么求?

### 2.5 正则表示: 重出江湖, 一统天下

这一次我们重新考虑正则表示. 同时我们考虑 $G \times G$ 在 $\mathbb{C}[G]$ 上的左右正则作用:

$$f \mapsto \rho(g_1, g_2) f = (x \mapsto f(g_1^{-1} x g_2)), \quad g_1, g_2 \in G, \ f \in \mathbb{C}[G].$$

我们在这里引入矩阵系数的概念. 设 $\pi$ 一个 $G$ 的表示, $\pi$ 的一个矩阵系数是 $G$ 上的函数

$$f(g) = \langle v, \pi^\vee(g) v^\vee \rangle, \quad v \in \pi, v^\vee \in \pi^\vee.$$

这样我们就定义了 $G \times G$ 表示的同态: $\pi \otimes \pi^\vee \to \mathbb{C}[G]$.

### 2.5.1 引理

设 $\pi$ 和 $\sigma$ 是 $G$ 的不可约表示, $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, $w \in \sigma$, $w^\vee \in \sigma^\vee$. 那么

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \pi(g)v, v^\vee\rangle\langle w, \sigma^\vee(g)w^\vee\rangle = \begin{cases} 0, & \pi \not\simeq \sigma; \\ (\dim \pi)^{-1}\langle v, w^\vee\rangle\langle w, v^\vee\rangle, & \pi \simeq \sigma. \end{cases}$$

特别的, 不同表示的矩阵系数是线性独立的.

证明: 给定 $v \in \pi$, $w^\vee \in \sigma^\vee$, 我们定义 $T : \pi^\vee \to \sigma^\vee$,

$$T(v^\vee) = \sum_{g\in G}\langle \pi(g)v, v^\vee\rangle \sigma^\vee(g)w^\vee.$$

容易看出 $T \in \mathrm{Hom}_G(V^\vee, W^\vee)$. 所以如果 $\pi \not\simeq \sigma$, 那么等式左边自动等于零. 如果 $\pi \simeq \sigma$, 那么 $T$ 是一个常数. 为了确定这个常数我们只需要算 $T$ 的迹. 大家来算算吧. 证毕.

有了这个铺路的引理, 我们很容易证明下面的定理.

### 2.5.2 定理

我们有 $G \times G$ 表示的典范同构

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee.$$

证明: 用矩阵系数我们得到同态

$$\bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee \to \mathbb{C}[G].$$

引理 2.5.1告诉我们这是单射. 数数维数告诉我们这是满射. 证毕.

大家想想, 反过来的同态怎么构造 (如果你勤奋的话请同时参考下面这组练习题）?

## 2.6 建议练习题

下面这组练习题给了研究表示的一种重要观点.

1. 考虑 $H = \mathbb{C}[G]$ 作为 $G$ 上全体复值函数生成的线性空间. 我们定义 $H$ 上的卷积

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g'\in G} f_1(g')f_2(g'^{-1}g).$$

   证明在此定义下 $H$ 是一个有限维代数, $H$ 是交换代数当且仅当 $G$ 是交换群.

2. 证明 $G$ 的表示等价于 $H$ 上的模 (这话说的不是很严谨, 大家先自己想想怎么严格地陈述这个命题).

3. 记 $R[G]$ 为 $G$ 所有不可约表示生成的线性空间. 证明存在非退化双线性形式

$$R[G] \times H/[H,H] \to \mathbb{C},$$

这里 $[H,H]$ 是由所有形如 $f_1 * f_2 - f_2 * f_1$ 的元素生成的理想 (先想想这个双线性形式怎么给!)

4. 你能给出 $H/[H,H]$ 的一组基吗? 由此你能得出什么结论?

#### 2.6.1 注记

这里的 $H$ 称为群代数或者是群 $G$ 的 Hecke 代数, $H/[H,H]$ 称为 $G$ 的余中心. 这些对象对于任意局部紧拓扑群都可以定义. 直接研究 $G$ 的余中心的结构能得到丰富的表示论信息. 这方面深入的研究可以参见

1. He, Xuhua. *Cocenters of p-adic groups, I: Newton decomposition.* Forum Math. Pi 6 (2018), e2, 27 pp.

### 2.7 两个有趣的定理

我们这一节的目的是证明两个稍微有点技巧性的结果. 两个结果都要用到点代数数论的基本知识.

首先我们注意到这样一个事实. 如果 $\pi$ 是 $G$ 的表示, 那么 $\chi_\pi(g)$ 是 $n$ 个单位根的和. 特别的, $\chi_\pi(g)$ 是代数整数.

#### 2.7.1 定理

设 $G$ 是有限群, $(\pi, V)$ 是不可约表示.

1. 若 $g \in G$, 那么
$$\frac{[G : C_G(g)]\chi_\pi(g)}{\dim V}$$
是代数整数.

2. $\dim V$ 整除 $|G|$.

证明: 记 $C_g$ 为包含 $g$ 的共轭类, 则 $[G : C_G(g)] = |C_g|$. 定义 $T : V \to V$ 如下,

$$T(v) = \sum_{h \in C_g} \pi(h)(v), \quad v \in V.$$

容易看出 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 所以 $T = \lambda \cdot \mathbf{1}_V$ (这个技巧我们已经用过好多遍啦!) 为了计算这个常数, 我们只需要计算 $T$ 的迹. 很容易就有

$$\mathrm{Trace}\, T = \sum_{h \in C_g} \chi_\pi(h) = |C_g|\chi_\pi(g).$$

于是 $\lambda = (\dim V)^{-1}|C_g|\chi_\pi(g)$. (这不就是第一个结论里面要的那个数吗?)

另一方面, $\pi$ 是右正则表示 $(\mathsf{R}, \mathbb{C}[G])$ 的子表示. 我们同样定义

$$S : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G], \quad S(v) = \sum_{h \in C_g} \mathsf{R}(h)v.$$

于是 $S$ 限制在 $(\pi, V)$ 上就得到了 $T$, 所以 $\lambda$ 是 $S$ 的特征值. 最后我们注意到 $S$ 的矩阵是一个 $0-1$ 矩阵 (自己想一下为什么), 所以 $S$ 的特征值都是代数整数. 这样就证明了第一个结论.

第二个结论很容易从第一个推出来. 用特征标的正交关系, 如果 $C_1, \cdots, C_n$, 是 $G$ 所有的共轭类, $g_i \in C_i$ 是代表元, 我们有

$$\frac{|G|}{\dim V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|C_i|\chi_\pi(g_i)}{\dim V} \overline{\chi_\pi(g_i)}.$$

第一个结论告诉我们右边是代数整数, 所以左边也是. 但左边是有理数, 所以只能是整数. 证毕.

### 2.7.2 注记

更精确的结论是 $\dim \pi \mid [G : Z_G]$, 这里 $Z_G$ 是 $G$ 的中心. 大家可以想想怎么证明. 当然要用到前面的结果啦.

### 2.7.3 Burnside 可解性定理

设 $G$ 是有限群.

1. 设 $C \subset G$ 是一个共轭类. 如果 $|C| = p^t$, $t \geq 1$, 那么 $G$ 不是单群.

2. (Burnside) 如果 $|G| = p^a q^b$, 这里 $p, q$ 是素数, 那么群 $G$ 可解.

证明: 先证明第一个结论. 首先 $G$ 不是 abel 群, 我们取 $1 \neq g \in C$. 记 $\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$ 是所有的不可约表示, $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$ 其特征标, 我们可以约定 $\pi_1$ 是平凡表示. 用正交关系, 我们有,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(1)\overline{\chi_i(g)} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \chi_i(1)\overline{\chi_i(g)}.$$

由此得到存在某个 $i \geq 2$, $\chi_i(g) \neq 0$, $p \nmid \chi_i(1)$ (否则 $p$ 整除整个求和号下的所有项, 但不整除 1). 于是 $|C|$ 与 $\chi_i(1)$ 互素, 所以存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得

$$a|C| + b\chi_i(1) = 1.$$

把这个变变形, 得到

$$\frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = a\frac{|C|\chi_i(g)}{\chi_i(1)} + b\chi_i(g).$$

根据定理 2.7.1, 右边是代数整数. 好了, 现在我们要引用代数数论的以下事实 (证明嘛当然是习题啦).

事实: 如果 $\alpha$ 是 $n$ 个单位根的和, $\alpha/n$ 是代数整数, 那么要么 $\alpha = 0$, 要么 $\alpha = n\omega$, 其中 $\omega$ 是某个单位根.

由这个结论, 我们就知道 $\chi_i(g) = \chi_i(1)\omega$, 这里 $\omega$ 是某个单位根.

接下来我们定义子群

$$Z(\chi_i) = \{h \in G \mid |\chi_i(h)| = \chi_i(1)\} = \{h \in G \mid \pi_i(h) = \omega_h \mathbf{1}\}.$$

这里 $\omega_h$ 是某个 (由 $h$ 确定的) 单位根, $\mathbf{1}$ 是恒等映射. 这是一个正规子群 (自己检验一下咯), 而且 $1 \neq g \in Z(\chi_i)$.

如果 $Z(\chi_i) \neq G$, 那么 $G$ 就不是单群, 我们就证完了. 如果 $Z(\chi_i) = G$, 那么所有 $\pi_i(g)$ 都是常值映射, 在由于 $\pi_i$ 是不可约表示, 所以 $\pi_i$ 是一维表示. 所以 $\operatorname{Ker}\chi_i$ 是 $G$ 的正规子群, 它不能等于 $G$(因为 $\pi_i$ 不是平凡表示), 也不能是 $\{1\}$, 因为 $G$ 不是交换群. 于是我们知道 $G$ 不是单群. 这样就证明了第一个结论.

现在证明第二个结论. 我们对 $|G|$ 做归纳法. 令 $H$ 是 $G$ 的 Sylow $p$-子群, 那么 $H$ 有非平凡中心. 取 $H$ 的中心元素 $g \neq 1$, 那么有 $H \leq C_G(g)$. 所以 $[G : C_G(g)] \mid [G : H] = q^b$. 于是 $[G : C_G(g)] = q^t$. 如果 $t \geq 1$, 那么由引理 $G$ 有正规子群 $N$. 归纳假设说 $N$ 与 $G/N$ 都可解, 于是 $G$ 可解. 如果 $t = 0$, 那么 $g$ 是 $G$ 中的中心元素, 所以 $G$ 有非平凡中心. 于是再用归纳法就搞定啦. 证毕.

建议练习题.

1. 你能找到一个不用特征标理论的证明吗?

这个问题是开玩笑的, 这样的证明是存在的, 但是很复杂. 你得对有限群论有极高的熟练度才能搞定.

# 3 诱导表示

这一节我们讨论 Mackey 关于诱导表示的理论. 这是深入研究表示论的基础. 特别的, 诱导表示给出了一种系统的从已知的小群的简单的表示, 构造大群的复杂表示的方法.

## 3.1 诱导表示和 Frobenius 互反律

先讨论一般的结果. 设 $G$ 是群, $H$ 是子群, $(\sigma, W)$ 是 $H$ 的表示. 所谓的诱导表示, 指的是空间

$$V = \{f : G \to W \mid f(hg) = \sigma(h)f(g)\},$$

群 $G$ 右正则作用在 $V$ 上. 这样的诱导表示一般记为 $\operatorname{Ind}_H^G \sigma$ 或者简单点 $\operatorname{Ind} \sigma$ (你也许会看到 ind).

这样的讨论当然太一般了, 基本我们什么不平凡的话都说不了. 不过我们注意到, 如果 $H = \{1\}$, $\sigma$ 是平凡表示, 那么 $\operatorname{Ind} \sigma$ 就是 $G$ 的右正则表示. 所以好像还是有点不那么平凡的东西.

我们还是讨论有限群的情况. 从现在开始, 所有的群, 只要不加说明都是有限的. 先举个例子, $G = S_3$, $H = A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 取 $H$ 的不平凡特征 $\chi$, 那么 $\operatorname{Ind} \chi$ 是 $G$ 唯一的两维不可约表示. (想想看, 有两个不同的不平凡特征 $\chi$, 另外一个 $\chi$ 怎么样?)

我们可以换一种方式理解诱导表示. 先取一组代表元 $G = g_1 H \cup \cdots \cup g_r H$. 诱导表示的空间是 $V = \oplus_i W_i$, 每一个 $W_i$ 均同构于 $W$, 且 $H$ 通过表示 $\sigma$ 作用于每一个 $W_i$ 上. 对于任意的 $g \in G$, 它在第 $i$ 个分量上的作用是这样给出. 首先取 $g_j$, 使得 $g_j^{-1} g g_i = h \in H$. 那么 $w \in W_i$ 在 $g$ 作用之下的像落在 $W_j$ 中, 且等于 $\sigma(h)w$. 咦? 这个描述问什么跟代表元选法无关? 自己动手算算呗. 正确就是任性.

### 3.1.1 引理

设 $\sigma$ 是 $H$ 的表示, 特征标为 $\chi_\sigma$. 令 $\pi = \operatorname{Ind} \sigma$. 那么

$$\chi_\pi(g) = \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ g_i^{-1} g g_i \in H}} \chi_\sigma(g_i^{-1} g g_i) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1} g x \in H}} \chi_\sigma(x^{-1} g x).$$

特别的, $\dim \operatorname{Ind} \sigma = [G : H] \dim \sigma$.

证明: 利用上面的描述直接按照定义算就好.

关于诱导表示最重要最基本的结果是 Frobenius 互反律. 设 $\pi$ 是 $G$ 的表示, 那么自动可以看成子群 $H$ 的表示, 我们记这个表示为 $\pi|_H$, 在不引起混淆的情况下往往就直接写成 $\pi$.

### 3.1.2 定理

设 $\pi$ 是 $G$ 的表示, $\sigma$ 是 $H$ 的表示. 那么

$$\dim \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind} \sigma, \pi) = \dim \operatorname{Hom}_H(\sigma, \pi|_H).$$

证明: 直接带入特征标公式计算.

#### 3.1.3 注记

事实上我们可以构造典范同构

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}\,\sigma, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi|_H).$$

这说明 Ind 与 $|_H$ 是伴随函子 (你得首先确信你明白这句话在说什么).

建议练习题:

1. 设 $H$ 是 $G$ 的子群, $m$ 和 $n$ 分别是 $H$ 和 $G$ 不可约表示的最大维数. 那么

$$m \leq n \leq [G:H]m.$$

### 3.2 Mackey 理论

设 $G$ 是有限群, $H_1$ 和 $H_2$ 是 $G$ 的子群, $\sigma_1, \sigma_2$ 分别是 $H_1$ 和 $H_2$ 的不可约表示. 现在问

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_{H_1}^G \sigma_1, \mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2\right) = ?$$

根据 Frobenius 互反律, 这个问题等价于问 $(\mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2)|_{H_1}$ 的分解. 我们的伟大前辈 Mackey 给出了完美的答案.

为了陈述定理我们引入如下定义. 设 $g \in G$, 我们定义 $g^{-1}H_2g$ 的表示 $(\sigma_2)^g$ 为 $(\sigma_2)^g(h) = \sigma_2(ghg^{-1})$ (同一个表示空间), $h \in H_2$.

#### 3.2.1 定理

取 $G$ 的双陪集分解 $G = H_2g_1H_1 \cup \cdots \cup H_2g_rH_1$. 我们有 $H_1$ 表示的同构

$$\left(\mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2\right)|_{H_1} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ind}_{H_1 \cap g_i^{-1}H_2g_i}^{H_1} (\sigma_2)^{g_i}.$$

证明: 大家如果觉得这个证明不好理解的话先假设 $\sigma_2$ 是平凡表示或者是一维表示 (事实上后面我们也就只用到这一种情况).

这个定理可能最要紧的地方在于理解为什么表示的分解跟双陪集分解有关. 我们注意到表示空间 $\mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2$ 的元素是函数 $f: G \to \sigma_2$, 他们在 $H_2$ 左平移下满足一些条件. 所以 (这是最重要的观察!), 下面的这个空间

$$I_i = \{f \in \mathrm{Ind}_{H_2}^G \sigma_2 \mid \mathrm{supp}\, f \subset H_2g_iH_1\}$$

是 $H_1$ 不变子空间. 做到这我们就完成一半了. 接下来的事情是就是证明作为 $H_1$ 的表示有同构

$$I_i \simeq \mathrm{Ind}_{H_1 \cap g_i^{-1}H_2g_i}^{H_1} (\sigma_2)^{g_i}.$$

这时候我们又想想, $I_i$ 的元素是一些 $G$ 上的函数, 右边那个空间里是一些 $H_1$ 上的函数 (这里要观察到两边函数的值域是一样的). 怎么才能得到一个典范的同态? 于是我们有了第二个重要的

观察. 注意到 $I_i$ 里的函数 $f$ 的值总是由 $f(g_ih)$, $h\in H_1$ 决定 (因为左边的 $H_2$ 可以搬到函数外面去). 所以本质上来说这个 $f$ 就是一个 $H_1$ 上的函数. 于是我们定义

$$I_i \to \mathrm{Ind}_{H_1\cap g_i^{-1}H_2g_i}^{H_1}(\sigma_2)^{g_i}, \quad f\mapsto \varphi, \quad \varphi(h)=f(g_ih).$$

根据条件直接验证 $\varphi$ 确实落在右边那个空间里, 这个映射也确实是表示的同态. 然后单射是容易验证的, 再数数维数就看出这也是满射. 证毕.

我们再强调一次, 这个证明反映了研究诱导表示最重要的方法之一 (双陪集分解), 值得大家好好把玩. 今后大家还会遇到很多表示论的研究本质上都是这样的方法. 比方说对典型群退化主序列表示合成列的研究就采用了我们定理证明中所描述的方法, 这个合成列在所谓的 Siegel–Weil 公式 (及其各种各样的变种) 的证明中很重要.

## 3.3 Artin 和 Brauer 关于诱导表示的定理

这里我们陈述 Artin 和 Brauer 关于诱导表示的两个重要结果, 其中 Brauer 定理在数论中有重要的应用. 我们只陈述定理不证明. 这两个证明对我们来说都太复杂了, 而且不怎么帮助我们理解进一步的内容. 大家想知道证明的话可以参考 Serre 的有限群表示论.

Artin 定理是说, 每个 $G$ 的特征标都是一些简单的诱导特征标的有理系数线性组合. 为了简化一些记号, 我们约定如果 $H$ 是子群, $\sigma$ 是 $H$ 的表示, $\chi$ 是其的特征标, 那么我们记 $\chi_H^G$ 为 $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ 的特征标.

### 3.3.1 定理

假设 $\pi$ 是 $G$ 的表示, 那么对每一个 $G$ 的循环子群 $C$, 存在 $a_C\in\mathbb{Q}$, 使得

$$\chi_\pi=\sum_C a_C\,\mathbf{1}_C^G,$$

其中 $C$ 跑遍所有的 $G$ 的所有循环子群, $\mathbf{1}$ 是 $C$ 的平凡表示.

这些系数 $a_C$ 能具体的算出来. 大家可以去查相关的材料.

Brauer 定理是说, 如果我们略微放宽子群的条件, 那么我们可以做到整系数线性组合. 为此我们定义所谓的 $G$ 的初等子群 $H$, 是指 $H=C\times P$, 其中 $P$ 是 $p$-群 (意思是 $|P|=p^r$, $p$ 是素数), $C$ 是循环群, 且 $p\nmid |C|$. 大家可能会问, 为什么初等子群是好的, 或者说简单的. 循环群自然不用说, $p$-群在群论中被认为是简单的, 主要来自于这样的事实: $p$-群的中心一定是非平凡的 (这个事实我们已经用过很多次了, 想想怎么证明? 数数共轭类的元素个数试试).

现在我们陈述 Brauer 的定理.

### 3.3.2 定理

群 $G$ 的特征标都是初等子群一次特征标的整系数线性组合.

从这个定理直接得到 Artin $L$-函数都是亚纯的.

另外要注意, 这里的系数不见得都能取到正整数. 这点很关键! 你要是能证明取到正整数 (这个命题当然是不对的!), 你就证明了 Artin $L$-函数都是全纯的 (想得美)! 下面的这个练习题足够粉碎你的任何幻想.

### 3.3.3 建议练习题

我们先引入一个定义. 如果 $H$ 是 $G$ 的子群, $\psi$ 是 $H$ 的一次特征标, 形如 $\psi_H^G$ 的特征标称为 $G$ 的单项特征标.

1. 设 $\chi$ 是 $G$ 的不可约特征标. 如果 $\chi$ 可以写成 $G$ 的单项特征标的正实系数线性组合, 那么存在正整数 $m$, 使得 $m\chi$ 是单项特征标.

2. 从现在开始取 $G = A_5$. 我们考虑 $G$ 在 $\mathbb{C}^5$ 上的置换表示. 证明它是一个一维表示和一个四维不可约表示的直和.

3. 记 $\chi$ 为上面这个四维表示的特征标. 证明如果 $m$ 是正整数, $H$ 是子群, $\psi$ 是 $H$ 的一次特征标, $m\chi = \psi_H^G$, 那么 $|H| = 15/m$, $m = 1, 3, 5, 15$.

4. 进一步的, 如果把 $\chi$ 限制在 $H$ 上, 那么 $\chi$ 包含某个一次特征标, 且这个特征标的重数等于 $m$.

5. 由此得到 $\chi$ 不是单项特征标的正实系数线性组合.

# 4 有限域上的二阶矩阵群

我们讨论 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示, 这里我们假设 $2 \nmid q$. 主要的目标: 通过 Weil 表示构造 $G$ 的所有不可约表示. 这一节是一个长例子, 会用到前面学过的几乎所有有限群表示知识. 我们建议大家在学习的时候能够尽量多地自己动手算. 所以这一节我们留给大家的练习机会也会更多一些. 古人云: 构造表示一时爽, 一直构造一直爽. 我们这一节要践行古人的哲学.

## 4.1 群的结构

我们还是先来熟悉一下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的结构. 由于表示和共轭类是相互决定的 (这种观点和意识很重要!), 我们先来算算 $G$ 上所有的共轭类. 具体的计算用 Jordan 标准型就可以搞定. 另外由于群 $\mathrm{GL}_2$ 的特殊性, 两个元素在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上共轭当且仅当它们在 $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_q})$ 上共轭 (为什么?) 另外我们有 $|G| = (q^2-1)(q^2-q)$.

我们就直接写下每个共轭类的代表元 (请大家自己检验). 我们固定一个 $\tau \in \mathbb{F}_q^\times \backslash (\mathbb{F}_q^\times)^2$, 这样 $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q[\sqrt{\tau}]$.

1. 中心: $\begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_q^\times$, 一共 $q-1$ 个共轭类. 每个共轭类有都只有一个元素.

2. 正则幺幂: $\begin{pmatrix} x & 1 \\ & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{F}_q^\times$, 一共有 $q-1$ 个共轭类. 每个共轭类有 $q^2-1$ 个元素.

3. 正则抛物半单: $\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$, $x \neq y$, 一共有 $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ 个元素. 每个共轭类有 $q^2+q$ 个元素.

4. 正则椭圆半单: $\begin{pmatrix} x & y \\ \tau y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{F}_q$, $x^2 - \tau y^2 \neq 0$, $y \neq 0$, 一共有 $\frac{1}{2}(q^2-q)$ 个元素. 每个共轭类有 $q^2-q$ 个元素.

加起来发现元素个数正好合适, 于是我们算对了! 爽!

现在我们再来定义一些 $G$ 的子群. 你当然会问, 为什么这些子群是重要的, 需要单独提出来说. 我只能说这些子群比较简单. 它们都来自代数群上最自然的那些闭子群, 比方说 Borel 子群 (抛物子群), 环面子群等等 (没听懂不是, 但没关系). 大家如果没有什么感觉就先接受现实, 再慢慢体会, 这些子群就是重要的, 以后会在不同的场合反复邂逅它们.

定义 Borel 子群 $B$ 和它的幺幂根 $N \simeq \mathbb{F}_q$,

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

另外两个环面子群: 分裂环面 $T_s \simeq (\mathbb{F}_q^\times)^2$ 和不分裂环面 $T_a \simeq \mathbb{F}_{q^2}^\times$,

$$T_s = \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} x & y \\ \tau y & x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{F}_q,\ x^2 - \tau y^2 \neq 0.$$

另外 $G$ 的中心 $Z \simeq \mathbb{F}_q^\times$. 好了, 现在你要想想, 假设我们换一个 $\tau$ 会发生什么情况?

对于群 $G$, 我们有重要的分解 (请大家自己验证)

$$G = B \coprod BwB.$$

是谓之 Bruhat 分解. 这是代数群理论里最重要最基本的结果之一.

我们还会碰到另外一个密切相关的群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \det g = 1\}.$$

关于这个群我们需要知道它的表现 (生成元和关系). 令

$$t(x) = \begin{pmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{pmatrix}, \quad n(y) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

这里 $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$, $w$ 叫做 $\mathrm{SL}_2$ 或者 $\mathrm{GL}_2$ 的 Weyl 元. 这些元素生成 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. 他们之间满足关系

$$t(x)t(y) = t(xy), \quad n(x)n(y) = n(x+y), \quad t(x)n(y)t(x)^{-1} = n(x^2y),$$

以及

$$wt(x)w^{-1} = t(x^{-1}), \quad wn(z)w^{-1} = t(z^{-1})n(-z)wn(-z^{-1}),\ (z \neq 0).$$

至于为什么是这样的表现, 你猜?(这个不重要, 承认这个事实就可以了)

## 4.2 抛物诱导表示

从现在开始, 我们记 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. 我们先构造一种特殊的诱导表示: 抛物诱导表示.

首先回忆一下我们定义了 Borel 子群 $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} \right\}$. 我们定义 $B$ 上的特征 (一维表示) $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ 如下:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y \\ & x_2 \end{pmatrix} \mapsto \chi_1(x_1)\chi_2(x_2).$$

定义 $I(\chi_1, \chi_2)$ 是由此特征诱导到 $G$ 上得到的表示. 具体来说, 空间

$$I(\chi_1, \chi_2) = \left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; f\left( \begin{pmatrix} x_1 & y \\ & x_2 \end{pmatrix} g \right) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)f(g) \right\},$$

群 $G$ 右正则总用在 $I(\chi_1, \chi_2)$ 中的函数上. 不难看出

$$\dim I(\chi_1, \chi_2) = q + 1.$$

我们现在研究 $I(\chi_1, \chi_2)$ 的可约性.

#### 4.2.1 定理

假设 $\chi_1, \chi_2, \mu_1, \mu_2$ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 的特征. 我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_G(I(\chi_1, \chi_2), I(\mu_1, \mu_2)) = \delta_{\chi_1,\mu_1}\delta_{\chi_2,\mu_2} + \delta_{\chi_1,\mu_2}\delta_{\chi_2,\mu_1}.$$

证明: 这是定理 3.2.1的一个简单应用. 有 Frobenius 互反律, 我们只需要研究 $I(\mu_1, \mu_2)|_B$ 的分解. 由 Bruhat 分解, $G$ 的 $B \times B$ 双陪集代表元有两个: 1, $w$. 注意到 $B \cap wBw^{-1} = T_s$. 记 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ 是 $B$ 的特征, 那么 $\mu^w$ 做为 $T_s$ 的特征是 $\mu' = (\mu_2, \mu_1)$. 用定理 3.2.1, 有

$$I(\mu_1, \mu_2)|_B = \mu \oplus \mathrm{Ind}_{T_s}^B \mu'.$$

再用 Frobenius 互反律有

$$\mathrm{Hom}_B(\chi, \mathrm{Ind}_{T_s}^B \mu') = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ind}_{T_s}^B \mu', \chi) = \mathrm{Hom}_{T_s}(\chi, \mu').$$

于是结论就很明显了. 证毕.

#### 4.2.2 推论

1. $I(\chi_1, \chi_2) \simeq I(\mu_1, \mu_2)$ 当且仅当 $\chi_1 = \mu_1$, $\chi_2 = \mu_2$, 或者 $\chi_1 = \mu_2$, $\chi_2 = \mu_1$.

2. 如果 $\chi_1 \neq \chi_2$, 那么 $I(\chi_1, \chi_2)$ 不可约.

3. $I(\chi, \chi)$ 分解成两个不可约表示, 其中一个是一维表示 $\chi \circ \det$, 另外一个记为 $\mathrm{St}_\chi$. 显然 $\mathrm{St}_\chi = \mathrm{St}_{\mathbf{1}} \otimes \chi$.

证明是显然的.

这里出现的 $\mathrm{St}_\chi$ 一般称为特殊表示, 而更特别的 $\mathrm{St} = \mathrm{St}_{\mathbf{1}}$ 一般叫做 Steinberg 表示, 当然我们有 $\dim \mathrm{St}_\chi = q$. 不可约的 $I(\chi_1, \chi_2)$ 一般称为不可约主序列表示.

建议练习题.

1. 假设 $\chi_1 \neq \chi_2$. 你能直接构造出同构 $I(\chi_1, \chi_2) \simeq I(\chi_2, \chi_1)$ 吗?

### 4.3 Weil 表示

我们现在来定义一个神奇的表示. 这个表示包含了所有 $G$ 的表示. 在这个意义下它有点像正则表示, 但它比正则表示小, 比正则表示简单且好研究. 我们这把这个表示叫做 Weil 表示, 你可能能看到别的名称包括 Oscillator representation, Segal–Shale–Weil representation 等等. 注意, 这里的材料是一门叫做 $\theta$-提升或者 $\theta$-对应的学问的最简单最初步的情况. 这门学问博大精深, 现在还有很多人在研究它.

首先我们要固定一个非平凡加法特征 $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ (你知道怎么固定吗?). 我们在取一个 $E = \mathbb{F}_{q^2}$ (不分裂的情况), 或者是 $E = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ (分裂的情况). 这样的 $E$ 上有对合, 迹和范映射. 如果 $E = \mathbb{F}_{q^2}$, 那就是通常的 Galois 共轭, 迹和范映射. 如果 $E$ 分裂, 我们定义

$\mathrm{Tr}(x,y)=x+y$, $N(x,y)=xy$, $(x,y)^\sigma=(y,x)$, $x,y\in\mathbb{F}_q$. 通过这样的定义,$E$ 是两维 $\mathbb{F}_q$ 内积空间: $\langle x,y\rangle=\mathrm{Tr}(x^\sigma y)$, $x,y\in E$.

对于我们记 $\mathcal{S}(E)$ 为 $E$ 上的函数空间 (这个怪怪的记号是为了与 Weil 表示的标准记号统一), $\phi\in\mathcal{S}(E)$. 我们定义一个 $\mathcal{S}(E)$ 上的 Fourier 变换: $\phi\mapsto\widehat{\phi}$,

$$\widehat{\phi}(x)=\epsilon q^{-1}\sum_{y\in E}\phi(y)\psi(\langle x,y\rangle)).$$

这里如果 $E$ 分裂, 那么 $\epsilon=1$; 如果 $E$ 不分裂, 那么 $\epsilon=-1$. 一个简单的事实是 (这个不难, 大家自己算算啊), $\widehat{\widehat{\phi}}(x)=\phi(-x)$.

### 4.3.1 定理

存在唯一的表示 $\omega:\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)\to\mathrm{GL}(\mathcal{S}(E))$, 满足

$$\begin{aligned}\omega(t(a))\phi(x)&=\phi(ax);\\ \omega(n(b))\phi(x)&=\psi(bNx)\phi(x);\\ \omega(w)\phi(x)&=\widehat{\phi}(x).\end{aligned}$$

证明: 直接检验生成元关系 (好吧, 我又想说这个不重要, 承认就好).

定理中的这个表示我们称之为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的 Weil 表示. 注意, 这个表示的定义依赖于加法特征标 $\psi$ 的选择. 如果我们换一个特征标会发生什么? (你怕是先要弄清楚两个不同的加法特征标之间区别是什么.)

注意到 $E$ 自身是一个环, 如果 $E$ 分裂, 那么 $E^\times\simeq\mathbb{F}_q^\times\times\mathbb{F}_q^\times$. 如果 $E$ 不分裂, 那么 $E^\times\simeq\mathbb{F}_{q^2}^\times$. 我们记 $E^1$ 是 $E$ 中范等于一的元素全体. 我们固定 $E^\times$ 的特征 $\chi:E^\times\to\mathbb{C}^\times$ 使得 $\chi|_{E^1}$ 不平凡 (这个等价于 $\chi$ 不能通过范映射分解). 考虑

$$\mathcal{S}(E)_\chi=\{\phi\in\mathcal{S}(E)\mid\phi(tx)=\chi(t)^{-1}\phi(x),\ t\in E^1,x\in E\}.$$

容易验证 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 都是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 不变子空间. 大家来算算维数. 我们有

$$\dim\mathcal{S}(E)_\chi=\begin{cases}q+1, & E\ \text{分裂};\\ q-1, & E\ \text{不分裂}.\end{cases}$$

我们目标是研究 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示. 所以我们要想办法把这个表示拓展到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上去. 直接定义, 对于 $\phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$, $b\in E^\times$, $a=Nb\in F^\times$,

$$\omega\left(\begin{pmatrix}a&\\&1\end{pmatrix}\right)\phi(x)=\chi(b)\phi(bx).$$

想一想, 为什么这样的定义是合理的? 大家只需要想想要说明定义是合理的需要证明什么, 具体怎么证明不重要. 我们把这个 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示记为 $\omega_\chi$.

### 4.3.2 总结

我们固定一个非平凡加法特征 $\psi:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^\times$. 对于 $E=\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q$ 或者 $E=\mathbb{F}_{q^2}$, $\chi:E^\times\to\mathbb{C}^\times$ 满足 $\chi|_{E^1}$ 不平凡, 我们都定义了一个表示 $\omega_\chi$. 这个表示的要点在于, 它是用具体的函数空间写下来的, 群作用也是具体写下来的, 所以研究起来并不复杂.

如果 $E$ 分裂, $\chi=(\chi_1,\chi_2)$, 那么表示 $(\omega_\chi,\mathcal{S}(E)_\chi)$ 是很简单的. 我们马上证明它就是 $I(\chi_1,\chi_2)$. 注意, 由我们的假设, $\chi_1\neq\chi_2$, 所以 $I(\chi_1,\chi_2)$ 是不可约的.

### 4.3.3 定理

我们有典范同构

$$\omega_{\chi_1,\chi_2}\simeq I(\chi_2,\chi_1),\quad \phi\mapsto\omega_{\chi_1,\chi_2}(g)\phi(1,0).$$

特别的, $\omega_{\chi_1,\chi_2}$ 不可约, 且 $\omega_{\chi_1,\chi_2}\simeq\omega_{\mu_1,\mu_2}$ 当且仅当 $\chi_1=\mu_1$, $\chi_2=\mu_2$, 或者 $\chi_1=\mu_2$, $\chi_2=\mu_1$.

证明: 容易验证 $\omega(g)\phi(1,0)\in I(\chi_1,\chi_2)$. 显然这个映射不等于零. 又有 $I(\chi_2,\chi_1)$ 不可约, $\dim\omega_{\chi_1,\chi_2}=\dim I(\chi_2,\chi_1)=q+1$. 再用用 Schur 引理就搞定啦. 证毕.

## 4.4 尖表示

我们称 $G$ 的表示 $\pi$ 为尖表示, 是说

$$\mathrm{Hom}_N(\pi,\mathbb{C})=0.$$

这是说不存在线性函数 $l:\pi\to\mathbb{C}$ 满足

$$l\left(\pi\begin{pmatrix}1&x\\&1\end{pmatrix}v\right)=l(v)$$

对所有的 $v\in\pi$ 成立, 注意, 在这个特定的条件下 (有限群), 这个条件与 $\pi$ 没有 $N$ 固定元素是等价的. 但是对于别的情况, 比方说 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 或者 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (如果你不知道这是什么就不管它), 这两个条件不等价.

### 4.4.1 定理

假设 $\pi$ 是尖表示. 那么 $q-1\mid\dim\pi$.

证明: 首先作为群有同构 $N\simeq\mathbb{F}_q$. 在注意到 $\mathbb{F}_q$ 的特征都长这样: $x\mapsto\psi(ax)$, $a\in\mathbb{F}_q$ (想想为什么. 这个基本的事实很重要.) 现在考虑 $N$ 在 $V^\vee$ 上的表示 (对偶表示限制在 $N$ 上). 既然 $N$ 是交换的, 那么 $V^\vee$ 能分解成 $N$ 的特征子空间的直和

$$V^\vee=\bigoplus_{a\in\mathbb{F}_q}V^\vee(a),$$

其中

$$V^\vee(a)=\left\{l\in V^\vee\;\middle|\;\pi^\vee\left(\begin{pmatrix}1&x\\&1\end{pmatrix}\right)l=\psi(ax)l\right\}.$$

假设条件 $\pi$ 是尖表示等价于 $V^\vee(0)=0$. 如果 $a\neq 0$, 那么有同构

$$V^\vee(1)\to V^\vee(a),\quad l\mapsto \pi^\vee\left(\begin{pmatrix} a & \\ & 1\end{pmatrix}\right)l.$$

所以 $\dim V^\vee(a)=\dim V^\vee(1)$, $\dim V=\dim V^\vee=(q-1)\dim V^\vee(1)$. 证毕.

现在我们分析在 $E$ 不分裂的条件下分析 $\mathcal{S}(E)_\chi$. 注意我们也有假设 $\chi|_{E^1}\neq 1$. 所以如果 $\Phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$, 那么 $\Phi(0)=0$. 我们要注意, 这里及后面的论证我们本质地用到了这个表示具体的构造, 也就是说这个表示是实现在某个具体的函数空间上, 群作用也能具体的写下来. 这是我们分析问题的法宝.

### 4.4.2 定理

假设 $E$ 不分裂, 那么 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 都是 $G$ 的不可约尖表示.

证明: 我们需要说明 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 里没有 $N$ 不变的元素 (再次强调, 这个刻画只对有限群成立). 我们已经知道 $\phi(0)=0$. 如果 $x\neq 0$, 那么找一个 $b\in\mathbb{F}_q$ 使得 $\psi(bNx)\neq 1$. 根据定义, 如果 $\phi\in\mathcal{S}(E)_\chi$ 是 $N$ 不变的, 那么

$$\phi(x)=\pi_\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & b\\ & 1\end{pmatrix}\right)\phi(x)=\psi(bNx)\phi(x).$$

所以 $\phi(x)=0$. 搞定.

因为 $\dim\mathcal{S}(E)_\chi=q-1$, 根据定理 4.4.1, 他们自动都是不可约的. 证毕.

最后我们需要分析哪些 $\omega_\chi$ 是相互同构的. 为此我们需要更仔细的分析一下 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 里的函数. 我们先构造这个空间的一组基. 如果 $a\in\mathbb{F}_q^\times$, 我们固定一个 $a'\in E^\times=\mathbb{F}_{q^2}^\times$ 满足 $Na'=a$. 我们令 $\phi_a\in\mathcal{S}(E)_\chi$ 满足

$$\phi_a(x)=\begin{cases}1, & x=a'\\ 0, & Nx\neq a.\end{cases}$$

注意, 由于 $\phi_a\in\mathcal{S}(E)_\chi$, 利用 $E^1$ 的作用, 我们就知道 $\phi_a$ 在所有满足 $Nx=a$ 的元素 $x\in E$ 上的值. 显然这是 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 的一组基. 我们这个基的构造地非常好, 使得对于任意的 $g\in G$, 我们总有

$$\operatorname{Trace}\omega_\chi(g)=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}(\omega_\chi(g)\phi_a)(a').$$

利用 Weil 表示的公式, 我们可以直接算出 (等一下解释怎么算)

$$\operatorname{Trace}\omega_\chi\left(\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t\end{pmatrix}\right)=\chi(t)\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\psi(-ta)=-\chi(t).$$

这样我们就证明了, 如果 $\omega_\chi\simeq\omega_\mu$, 那么 $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times}=\mu|_{\mathbb{F}_q^\times}$.

最后来解释一下 $\omega_\chi\left(\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t\end{pmatrix}\right)\phi_a$ 怎么算. 这里主要 (或者是唯一) 的方法就是矩阵分解. 想法是: 我们就只知道 $\omega_\chi$ 在那几个生成元上的作用效果, 那我们就把这个矩阵分解成那些生成

元的乘积呗. 有了这样的信念剩下的就是带入 Weil 表示的公式做初等的计算了. 我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} t & \\ 1 & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t^2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & \\ 1 & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第一次看不出来这个分解没关系, 多算几次就熟练了. 这种 $2 \times 2$ 矩阵的分解在表示论中很常见. 古人的话是说 "无他, 唯手熟尔", 现在人的话是说 "常规操作". 仅此而已.

## 4.5 总结

迄今为止我们构造的四类不可约表示: 一维表示, 特殊表示, 不可约主序列表示, 由 Weil 表示构造出的不可约尖表示.

### 4.5.1 定理

1. $\omega_\chi \simeq \omega_\mu$ 等价于 $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \mu|_{\mathbb{F}_q^\times}$.

2. $\omega_\chi$ 穷尽了所有的不可约尖表示.

3. 我们构造出的表示穷尽了 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 所有的不可约表示.

证明: 首先由上面的讨论我们知道如果 $\omega_\chi \simeq \omega_\mu$, 那么 $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \mu|_{\mathbb{F}_q^\times}$. 请大家自行检验这等价于 $\chi = \mu$ 或者 $\chi = \mu \circ \sigma$. 于是我们至少找到了 $\frac{1}{2}(q^2 - q)$ 个不同的不可约尖表示 (你自己数数? 一共有 $q^2 - q$ 个特征在 $E^1$ 上非平凡, 这里面再把 $\chi$ 跟 $\chi \circ \sigma$ 等同起来).

到目前为止, 我们构造了如下表示.

1. $\pi = \chi \circ \det$, 共有 $q - 1$ 个.

2. $\pi = \mathrm{St}_\chi$, 共有 $q - 1$ 个.

3. $\pi = \omega_\chi$, $E = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ 分裂, $\chi = (\chi_1, \chi_2)$, $\chi_1 \neq \chi_2$, 共有 $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ 个.

4. $\pi = \omega_\chi$, $E = \mathbb{F}_{q^2}$ 不分裂, $\chi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\chi|_{E^1} \neq 0$, 至少有 $\frac{1}{2}(q^2 - q)$ 个.

数一下表示的个数, 再数一下共轭类的个数, 我们至少构造了不少于共轭类个数那么多个不可约表示. 所以我们构造出了所有的不可约表示! 爽! 这个事实也告诉我们, 如果 $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \mu|_{\mathbb{F}_q^\times}$, 那么一定有 $\omega_\chi \simeq \omega_\mu$, 否则不可约表示的个数就多了! 证毕.

### 4.5.2 注记

对比一下共轭类数目和不可约表示的数目, 好像不那么简单诶. 四种共轭类, 四种表示, 每一种的个数都是一样的. 咋回事?(你猜? 这个其实很深刻, 我们就不讨论了).

另外, 我们似乎还有一个观察, 每一个表示都是通过一个环面子群的特征构造出来的. 所以似乎有

$$\{(T,\theta) \mid T \text{ 是环面子群}, \theta \text{ 是 } T \text{ 的特征}\} \leftrightarrow \{\text{所有的表示}\}.$$

这个也很深刻呢! 请参考 Deligne–Lusztig: *Reductive groups over finite fields*, Ann. Math. 1976. 最近的工作可以参考 Kaletha: *Regular supercuspidal representations*, JAMS. To appear.

你看, 一个小小的群能引出这么多深刻的数学, 惊喜不惊喜, 意外不意外?

# 5 淡中忠郎重构定理 (一)

这一节的目的是从范畴的角度讨论有限群的表示论. 我们的目标是证明有限群 $G$ 的所有有限维表示做成的范畴 (和若干附加结构) 唯一决定了群 $G$. 这是所谓的淡中构架 (Tannakian formalism) 最基本最简单的例子.

这里的证明是很简单的, 就是纯粹的同义反复. 但是初学的时候容易摸不清头脑, 搞不清楚他到底想说什么. 我的建议是: 严格地套定义, 不理解的时候就把定义写下来, 看看说的话是不是符合定义. 当然了, 这种抽象的东西需要一定的时间理解和消化. 祝大家好运.

## 5.1 群代数

我们首先研究群代数 $\mathbb{C}[G]$. 这货我们谈过很多次了. 之前我们一直将它作为 $G \times G$ 表示, 现在我们要研究它作为 $\mathbb{C}$ 上有限维代数的结构. 一句话说就是 $\mathbb{C}[G]$ 是一个 Hopf 代数, 但是要准确的定义这个概念需要很长的篇幅, 所以我们就只描述一下 $\mathbb{C}[G]$ 的双代数结构.

首先 $\mathbb{C}[G]$ 中的乘法由函数的卷积给出. 我们将 $\mathbb{C}[G]$ 中的元素记为

$$\sum_{g \in G} a_g[g], \quad a_g \in \mathbb{C},$$

其中 $[g]$ 是 $G$ 上的函数, 满足如果 $h \neq g$ 那么 $[g](h) = 0$, $[g](g) = 1$. 容易检验 $[g] * [h] = [gh]$.

其次 $\mathbb{C}[G]$ 上也有一个所谓的余代数 (coalgebra) 结构. 这里我们有余乘法 (comultiplication)

$$\Delta : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G], \quad \sum_{g \in G} a_g[g] \mapsto \sum_{g \in G} a_g[g] \otimes [g],$$

和余单位 (counit)

$$\epsilon : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}, \quad \sum_{g \in G} a_g[g] \mapsto \sum_{g \in G} a_g.$$

这些结构与 $\mathbb{C}[G]$ 的代数结构自然相容. 特别的, 我们可以验证 $\Delta$ 是 $G$ 表示的同态 (右正则表示, 请自己检验).

最后 $G$ 上的对合 $g \mapsto g^{-1}$ 诱导对极 (antipode) 映射

$$\iota : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G], \quad \sum_{g \in G} a_g[g] \mapsto \sum_{g \in G} a_g[g^{-1}].$$

(我们并不需要这个结构.)

### 5.1.1 引理

设 $x \in \mathbb{C}[G]$. 如果 $\Delta(x) = x \otimes x$, 那么 $x \in G$.

证明: 不会这个也要我算给你看吧. 好吧, 我还是算给你看. 设 $x = \sum a_g[g]$. 那么

$$x \otimes x = \sum_{g,h \in G} a_g a_h [g] \otimes [h].$$

所以如果 $\Delta(x) = x \otimes x$, 那么当 $g \neq h$ 时总有 $a_g a_h = 0$. 于是最多只有一个 $a_g$ 不是零. 后面就不需要说了吧. 证毕.

### 5.1.2 注记

一般来说, 如果一个线性空间同时具有相容的代数结构, 余代数结构和对极结构, 我们称之为 Hopf 代数. 上面的讨论说明 $\mathbb{C}[G]$ 是 Hopf 代数. Hopf 代数的研究是一门很大的学问, 在诸多领域里有重要的应用.

## 5.2 表示范畴

我们记 $\mathcal{R}(G)$ 为 $G$ 上所有有限维表示组成的范畴, 态射由表示的同态给出. 我们记 $\mathcal{V}$ 为所有有限维线性空间组成的范畴, 态射由线性映射给出. 我们也有遗忘函子:

$$F : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{V}, \quad (\pi, V) \mapsto V.$$

这两个范畴都是 abelian 范畴. 两个范畴上各自有一个张量积结构. 显然的 $F$ 是保持张量积结构的:

$$F((\pi, V) \otimes (\sigma, W)) = V \otimes W.$$

用更抽象的语言来说, 这两个范畴都是刚性对称张量积 abelian 范畴 (rigid symmetric monoidal abelian category), 遗忘函子是正合且忠实的. 这表明表示范畴 $\mathcal{R}(G)$ 是 Tannakian 范畴. 具体要写下这个定义是很长的,(对我们) 也是很没用的. 大家有兴趣的可以自己去翻书, 比方说 Deligne 和 Milne 写的 Tannakian Categories.

## 5.3 遗忘函子的自同构群

我们特别感兴趣的是遗忘函子 $F$ 的自同构群. 我们记 $\mathrm{Aut}(F)$ 为 $F$ 的自同构群, $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 为所有保持张量积结构的自同构构成的子群. 首先大家肯定要问的问题是, 请说人话, 这堆抽象的东西是啥?

我们现在来解释这个定义. 所谓 $F$ 的自同构, 是指的对于每一个 $\mathcal{R}(G)$ 中的对象 $(\pi, V)$, 我们都有一个 (线性空间的) 自同构 $\phi_{\pi,V} : V \to V$, 而且这些自同构之间满足条件: 如果我们有表示的同态 $f : (\pi, V) \to (\sigma, W)$, 那么就有交换图 (作为线性映射)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{(\pi,V)}"'] & W \arrow[d, "\phi_{(\sigma,W)}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}.$$

所谓的保持张量积结构, 就是说

$$\phi_{(\pi,V)} \otimes \phi_{(\sigma,W)} = \phi_{(\pi\otimes\sigma, V\otimes W)}.$$

或者更具体的说, 我们有自同构 $\phi_{(\pi,V)} : V \to V$, $\phi_{(\sigma,W)} : W \to W$, 于是有自同构

$$\phi_{(\pi,V)} \otimes \phi_{(\sigma,W)} : V \otimes W \to V \otimes W.$$

保持张量积结构就是说这个自同构跟 $\phi_{(\pi\otimes\sigma,V\otimes W)}$ 是一回事. 这当然是一个很自然的条件. 事实上, 如果去掉保持张量积的条件 $\mathrm{Aut}(F)$ 的结构是很简单平凡的 (参考下面的练习题). 作为记号, 如果 $\phi\in\mathrm{Aut}(F)$, 那么我们记 $\phi_{(\pi,V)}$ 为它在 $V=F((\pi,V))$ 上定义的自同构.

建议练习题.

1. 设 $(\pi_i,V_i)$, $i=1,\cdots,r$, 是 $G$ 的所有不可约表示. 证明

$$\mathrm{Aut}(F)\simeq\prod_{i=1}^{r}\mathrm{GL}(V_i)$$

   是群同构.

2. 求恒同函子 $\mathbf{1}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 的自同构群.

### 5.3.1 引理

设 $\phi\in\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$. 那么 $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)\in G$.

证明: 首先当然 $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)\in\mathbb{C}[G]$, 我们只需要证明

$$\Delta(\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1))=\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)\otimes\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1).$$

由于 $\phi$ 保持张量积结构, 这个等式右边等于

$$\phi_{(\mathsf{R}\otimes\mathsf{R},\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G])}(1\otimes1).$$

再由于 $\Delta$ 是 $G$ 表示的同态, 有函子自同构的定义就得到

$$\Delta(\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1))=\phi_{(\mathsf{R}\otimes\mathsf{R},\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G])}(1\otimes1).$$

这样就证完了. 证毕. 看吧, 这其实就是把定义搞清楚就可以了.

### 5.3.2 注记

注意上面这个引理中 $\phi$ 一定要保持张量积结构, 否则结论不对. 保持张量积结构的作用在上面的证明中很明显 (不至于这个都看不出来吧).

### 5.3.3 引理

设 $\phi,\psi\in\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)=\psi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)$, 那么 $\phi=\psi$.

证明: 我们只需要证明我们能从 $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)$ 还原出任何 $\phi_{(\pi,V)}$ 即可. 设 $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)=g\in G$. 我们将证明, 对于任意的 $v\in V$, 我们有 $\phi_{(\pi,V)}(v)=\pi(g^{-1})v$. 我们用到右正则表示的如下性质: 如果 $(\pi,V)$ 是 $G$ 的表示,$v\in V$, 那么存在唯一的表示同态

$$f_v:(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])\to(\pi,V),\quad f_v(1)=v.$$

这个性质当然是显而易见的. 现在把 $\phi$ 用到这个表示同态 $f_v$ 上, 我们就得到了交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[G] \arrow[r, "f_v"] \arrow[d, "\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}"'] & V \arrow[d, "\phi_{(\pi,V)}"] \\
\mathbb{C}[G] \arrow[r, "f_v"'] & V
\end{tikzcd} .$$

所以 $\phi_{(\pi,V)}(v)=\pi(g^{-1})v$. 证毕.

## 5.4 同义反复

我们现在定义一个映射 $T:G\to \mathrm{Aut}(F)$. 对于任意的元素 $g\in G$, 我们定义 $\phi=T(g)\in \mathrm{Aut}(F)$ 是这样的一个自同构: 如果 $(\pi,V)$ 是一个表示, 那么 $\phi_{(\pi,V)}=\pi(g)$. 你先理解清楚这个定义, 然后就能很直接了当的看到 $T$ 其实定义了一个群同态

$$T:G\to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F).$$

你看清楚这个定义到底在说什么了之后就会立刻明白这个定义纯粹同义反复, 没有任何实质的内容.

### 5.4.1 定理

我们这样定义的 $T$ 是群同构.

证明: 先证 $T$ 是单同态. 这个时候你就要搞清楚 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 里的单位元是什么. 根据定义, 单位元的意思是说对于任意的表示 $(\pi,V)$, $\phi_{(\pi,V)}:V\to V$ 都是恒等映射. 这样就好说了. 如果 $g\in G$, $T(g)=1$, 我们考虑右正则表示 $(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])$, 那么 $T(g)_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}=\mathsf{R}(g):\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ 是恒等映射. 好了, 我们引用一个事实: 右正则表示是忠实表示, 也就是说 $\mathsf{R}:G\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$ 是单射 (大家想想这是为什么). 所以 $g=1$.

再证 $T$ 是满同态. 设 $\phi\in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, $\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)=g$. 那么有 $T(g^{-1})=\phi$. 原因很简单, 因为根据定义我们有 $T(g^{-1})_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)=\phi_{(\mathsf{R},\mathbb{C}[G])}(1)=g$. 再用前面的引理就搞定啦.

### 5.4.2 注记

请大家仔细体会遗忘函子的作用. 一般来说, 如果 $G,H$ 是有限群, 仅仅从 $\mathcal{R}(G)$ 与 $\mathcal{R}(H)$ 作为张量范畴等价是不能推出 $G\simeq H$ 的. 这里有一些很微妙的地方, 比方说作为到底是作为张量范畴等价还是作为对称张量范畴等价. 进一步的讨论可以参考 Etingof 和 Gelaki 的文章: *Isocategorical groups*, https://arxiv.org/abs/math/0007196

### 5.4.3 注记

我们还要注意到, 淡中忠郎重构定理的要点在于我们考虑的是从群的表示重构这个群, 而不简单是重构群代数. 事实上, 重构出群代数是平凡的, 只是米田信夫引理的简单应用.

建议练习题.

1. 设 $R$ 是环, $\mathcal{M}$ 是 $R$ 上的右模范畴, $\mathcal{A}$ 是 abel 群范畴, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 是遗忘函子. 证明 $F$ 是可表函子 (用啥表出来的?).

2. 记 $\mathrm{End}(F)$ 为所有 $F$ 到自身的自然变换组成的集合. 证明 $\mathrm{End}(F)$ 是一个环, 且同构于 $R$.

# 6 Fourier 级数和圆圈的表示

从这一节开始我们讨论一些简单的紧拓扑群的表示. 这当然比有限群复杂, 所以我们先看一个具体的例子: Fourier 级数. 让我们穿越回二百年前, 走进 Fourier 的内心世界. 既然是穿越, 我们的工具和观点自然是现代的 (古人说话术语和符号我都不怎么看得懂).

圆圈是什么? 当然是 $S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 了. 这是一个群! 它还是一个紧拓扑群 ($\mathbb{C}$ 上的诱导拓扑). 我们这一节很初步的谈一谈这个群的 "表示", 给我们之后的学习提供一个具体的例子. 我们这里当然是把简单的事情复杂化, 故意用高级的语言描述简单的事实. 所以大家学习的时候希望能多思考, 多问为什么, 多想想定义到底是什么, 为什么要这么定义. 这样才能达到学习的效果.

## 6.1 平方可积函数

我们要谈 $S^1$ 的表示, 首先就碰到了一个问题, 到底什么才是 $S^1$ 的表示? 或者说, 我们到底应该考虑 $S^1$ 在哪些线性空间上的作用, 这样的作用应该满足什么条件? 我们假设 $V$ 是某个线性空间, $\pi: S^1\to \mathrm{GL}(V)$ 是一个 "表示". 首先, $\pi$ 至少要是群同态, 否则根本谈不上表示. 我们需要哪些附加的性质呢?

我们要观察到 $S^1$ 上有拓扑, 所以这个 "表示" 应该有某种连续性. 但这样的考虑告诉我们 $V$ 上也必须要有拓扑才行, 否则就没法谈论连续性. 所以 $V$ 一定要是一个拓扑线性空间. 以前我们只考虑有限维线性空间, 但我们很快会看到, 有限维线性空间不够用了. 那么什么样无限维 (拓扑) 线性空间我们最熟悉, 最像有限维线性空间? 当然是 Hilbert 空间了. 所谓的 Hilbert 空间, 指的是一个线性空间, 上面的有一个内积 (正定 Hermitian 形式), 内积诱导距离, 进而诱导拓扑, 而这个线性空间在这个距离下是完备的 (每个 Cauchy 列都有收敛子列). 圆圈 $S^1$ 在 $V$ 上的连续保距作用应该就是 $S^1$ 的表示. 为了避免不必要的泛函分析讨论, 我们就举一个例子:$L^2(S^1)$.

首先我们注意到 $S^1$ 上存在一个乘法不变的测度, 我们称为 $\mathrm{d}z$. 这个测度的描述很简单, 一句话说就是弧长. 更精确一定是说我们有光滑映射 $\exp:[0,1]\to S^1$, $x\mapsto e^{2\pi i x}$, 而测度 $\mathrm{d}z$ 由 $[0,1]$ 上通常的 Lebesgue 测度诱导得到 (大家最好想想在 0 和 1 的光滑性是什么意思). 乘法不变的意思是说如果某个集合 $U\subset S^1$ 的测度是 $a$, 那么给定 $z\in S^1$, 集合 $\{zu\mid u\in U\}$ 的测度还是 $a$. 你想一下嘛, 一段弧, 你把它旋转一个角度弧长当然是不变的啦. 这样我们定义

$$L^2(S^1)=\left\{f:S^1\to\mathbb{C}\;\middle|\;\int_{S^1}|f(z)|^2\mathrm{d}z<\infty\right\}.$$

这当然是一个线性空间. 坏消息是它是无限维的, 但是好消息是 $L^2(S^1)$ 上有内积,

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_{S^1}f_1(z)\overline{f_2(z)}\mathrm{d}z.$$

这个内积当然是正定的, 所以它定义了 $L^2(S^1)$ 上的长度. 当然了, 数学家说话要高大上一点嘛, 所以给个名字叫做范数:

$$\|f\|_{L^2}=\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

同样的还有垂直的概念: 如果 $\langle f_1,f_2\rangle=0$, 那么我们说 $f_1$ 与 $f_2$ 是垂直的. 当然了, 数学家还是要给一个高大上的名字, 叫 $f_1$ 和 $f_2$ 是正交的.

泛函分析的一个基本结果是空间 $L^2(S^1)$ 是完备的. 这个意思是说如果 $L^2(S^1)$ 中的函数列 $f_1, \cdots, f_n, \cdots$ 在范数 $\|\cdot\|_{L^2}$ 下是 Cauchy 序列, 那么它的 $L^2(S^1)$ 存在唯一的极限 (函数). 所以 $L^2(S^1)$ 是 Hilbert 空间. 这个结果一般被称为 Riesz–Fisher 定理.

我们记 $C(S^1)$ 为 $S^1$ 上的连续函数空间. 拓扑学的基本结果是说紧集上的连续函数都是一致连续的. 所以如果我们赋予 $C(S^1)$ 一致范数, 即

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{z \in S^1} |f(z)|,$$

那么 $C(S^1)$ 也是完备的 (这是一个 Banach 空间, 但我们暂时不需要这个概念). 函数论的另外一个基本定理是说 $C(S^1)$ 在 $L^2(S^1)$ 中是稠密的, 即平方可积函数都可以用连续函数平方平均逼近.

自然的, $S^1$ 在 $L^2(S^1)$ 上有右正则作用, 我们还是记作 $\mathsf{R}$(跟有限群的定义完全一样). Fourier 级数最重要的研究对象就是这个作用. 右正则作用是连续的, 这个意思是说对于任何 $z$, 映射

$$\mathsf{R}(z) : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$$

都是连续映射 (定义域和值域上都有拓扑, 所以可以谈论连续性啊). 事实上, 很容易验证这个映射是保长度 (或者叫保范数) 的 (这个比连续性强, 如果以前没学过的话建议想想为什么). 其实我们还有更强的连续性: 映射

$$S^1 \times L^2(S^1) \to L^2(S^1), \quad (z, f) \mapsto \mathsf{R}(z)f$$

是连续的 (为什么? 你得先想明白为了证明这个连续性你需要证明什么?)

建议练习题.

1. 把上面的这些为什么都想清楚, 最好都写一下定义.

2. 我们为什么没有考虑左正则作用?

## 6.2 圆圈的表示

我们现在来想一下圆圈的 “不可约表示” 到底应该是些什么. 注意我们并没有定义什么叫不可约表示 (事实上, 对于一般的拓扑群, 搞清楚怎么定义这件事情并不是平凡的). 但我们可以想象一下, 怎么样的定义才是合理的. 最重要的, 我们应该观察到, $S^1$ 是交换群, 所以根据我们从有限群表示的来的经验, 交换群的不可约表示都是一维的, 所以如果我们做出合理的定义, 那么 $S^1$ 的不可约表示应该被都是一维的. 一维表示等价于群同态 $S^1 \to \mathbb{C}^\times$. 当然了, 根据前一小节说的, 我们还应该考虑连续性, 所以 $S^1$ 的不可约表示应该是 $S^1$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的连续群同态. 好了, 现在轮到大家来做练习了.

建议练习题.

1. 证明 $S^1 \to \mathbb{C}^\times$ 的连续群同态长下面这样:

$$\chi_n : S^1 \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto z^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

自然的, $\chi_n$ 的表示空间都是一维的, 暂且就把它记为 $\mathbb{C}e$, 这里 $e$ 是一个基. 我们也可以定义 $L^2(S^1)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的作用如下

$$\chi_n(f)e = \int_{S^1} f(z)\chi_n(z)e\mathrm{d}z = \left(\int_{S^1} f(z)z^n\mathrm{d}z\right) e \in \mathbb{C}e.$$

这个积分当然是收敛的 (为什么? 用用 Cauchy 不等式试试?) 这个积分具体算出来是什么? 我们注意到 $f$ 是 $S^1$ 上的函数, 所以可以看成是 $[0,1)$ 上的函数, 或者是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数. 于是上面那个积分就等于

$$\int_0^1 f(t)e^{2\pi int}\mathrm{d}t.$$

这是什么? 当然就是 $f$ 的第 $(-n)$ 个 Fourier 系数啊! 所以我们研究函数 $f$ 的 Fourier 级数就等价于研究 $S^1$ 的表示.

我们也可以考虑 $L^2(S^1)$ 在整个 $L^2(S^1)$ 上的作用. 简单的说, 如果 $f \in L^2(S^1)$, $\phi \in L^2(S^2)$, 那么我们定义

$$\mathsf{R}(f)\phi(z) = \int_{S^1} f(u)\phi(zu)\mathrm{d}u.$$

现在大家来做一点数学分析.

建议练习题.

1. 上面的积分为什么是收敛的?
2. 设 $f \in C(S^1)$. 证明 $\mathsf{R}(f)\phi \in C(S^1)$.
3. 还是假设 $f \in C(S^1)$. 如果 $\phi_1, \cdots, \phi_n, \cdots$ 是 $L^2(S^1)$ 的收敛序列, 那么序列 $\mathsf{R}(f)\phi_1, \cdots$ 在 $C(S^1)$ 中收敛. 注意, 后面这个收敛性比前面那个强多啦.

## 6.3 逼近定理

一维表示的矩阵系数总是很简单的. 根据我们从有限群得到的经验, $\chi_n$ 的矩阵系数就是 $\chi_n(z)$ (作为 $S^1$) 上的函数. 这当然也可以等同成 $[0,1)$ 上的函数, 或者是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数. 我们这里要复习一个重要的定理. 假设 $f \in L^2(S^1)$, 看成是 $[0,1)$ 上的函数, 那么我们可以考虑它的 Fourier 级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e^{2\pi int}, \quad a_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\mathrm{d}t.$$

下面是 Fourier 级数理论的一个主要结果.

### 6.3.1 定理

1. 函数 $\{e^{2\pi int} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 构成了 $L^2(S^1)$ 的标准正交基 (这个是说它们线性独立, 而且如果某个 $f$ 垂直于所有的 $e^{2\pi int}$, 那么 $f = 0$).
2. 函数 $f$ 的 Fourier 级数在 $L^2(S^1)$ 中收敛到 $f$. 特别的, $f$ 可以用三角多项式平方平均逼近.

证明可以在任何一本数学分析教材中找到.

当然我们可以重新叙述一下.

### 6.3.2 定理

圆圈群 $S^1$ 的不可约表示的矩阵系数在 $L^2(S^1)$ 中稠密. 不同的矩阵系数在 $L^2(S^1)$ 中是正交的.

你看, 这样叙述是不是感觉高大上多了? 我们还可以叙述的更玄妙一点. 记 $\mathbb{C}e^{2\pi int}$ 为 $e^{2\pi int}$ 在 $L^2(S^1)$ 中生成的一维子空间. 于是 $S^1$ 在 $\mathbb{C}e^{2\pi int}$ 上的作用就是 $\chi_n$. 那么我们可以考虑 Hilbert 直和 (先做直和, 再在 $L^2(S^1)$ 中做完备化)

$$\widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}e^{2\pi int}$$

这里面的元素是无穷级数 (不见得逐点收敛)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi int}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty.$$

于是上面的定理可以写成下面的样子.

### 6.3.3 定理

存在 $S^1$ 表示的典范同构

$$L^2(S^1) \simeq \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}e^{2\pi int}, \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f) e^{2\pi int}. \tag{6.1}$$

实际上, 我们还有一个更强的逼近定理. 我们先引入一个概念, 设 $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是一列 $S^1$ 上的连续函数. 所谓的 Cesaro 部分和是指

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{-N\le n\le N} f_n(z), \quad N = 1, 2, \cdots,$$

### 6.3.4 定理

设 $f \in C(S^1)$. 那么 $f$ 的 Fourier 级数的 Cesaro 部分和一致收敛到 $f$.

同样我们可以重新叙述一下.

### 6.3.5 定理

圆圈群 $S^1$ 的不可约表示的矩阵系数在 $C(S^1)$ 中稠密.

这里要注意, 我们讨论了两个空间 $L^2(S^1)$ 和 $C(S^1)$, 这两个空间上的范数是不一样的, 所以收敛或者是稠密在这两个空间里并不是同一个意思. 另外要注意, 这个道貌岸然的叙述其实比数学分析中的简单暴力的叙述要弱不少.

最后我们在叙述一个定理. 这时我们考虑 $C^\infty(S^1)$, 也就是 $S^1$ 上的光滑函数.

### 6.3.6 定理

设 $f \in C^\infty(S^1)$, 那么对于任意的 $\alpha > 0$, 有

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),.$$

特别的, $f$ 的 Fourier 级数一致收敛到 $f$. 如果我们通过 $t \mapsto e^{2\pi it}$ 将 $f$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的光滑周期函数, 那么

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{2\pi int}.$$

证明也可以在任何的数学分析教材中找到.

同样我们可以叙述得高大上一点.

### 6.3.7 定理

设 $f \in C^\infty(S^1)$. 那么

$$f(1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{Trace} \chi_n(f).$$

特别的, 右边的级数一致收敛.

这当然是纯粹是上面定理的同义反复了.

建议练习题.

我们当然有 $C(S^1)$ 是 $L^2(S^1)$ 的子空间 (当然也是子表示, 但不是闭子表示). 同样我们可以定义 $C^p(S^1) \subset L^2(S^1)$, $0 \leq p \leq \infty$ (特别强调 $p$ 可以等于 $\infty$), 它是由具有 $p$-次连续导数的函数构成的子空间.

1. 说明 $C^p(S^1)$ 都是子表示, 但不是闭子表示.
2. 你能刻画 $C^p(S^1)$ 在同构 (6.1)下的象吗?
3. 你能在 $C^p(S^1)$ 上找到范数使得它是一个完备的拓扑线性空间吗?

# 7 紧群的 Peter–Weyl 定理

我们在这一节讨论紧群的 Peter–Weyl 定理. 这是抽象紧群最重要的一个定理啦.

## 7.1 拓扑群的表示

所谓的一个拓扑群 $G$, 是说 $G$ 是一个群, 也是一个拓扑空间, 且群运算是连续映射. 常见的群都是拓扑群, 比方说, $\mathbb{R}$(加法群), $\mathbb{R}^\times$(乘法群), $S^1$(圆圈), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n,R)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ (还有把 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$ 得到的那些群).

我们只讨论 $G$ 的酉表示. 酉表示的意思是说 $G$ 在 Hilbert 空间 $(V,\langle -,-\rangle)$ 上的作用, 满足每一个 $g\in G$ 都是酉算子, 且从 $G$ 映到 $V$ 上算子构成的空间是连续的. (大家最好复习一下算子空间上的拓扑是怎么给的.) 所谓的不可约表示, 是说 $V$ 不包含酉子表示. 由于表示空间 $V$ 是 Hilbert 空间, 我们考虑的表示总是完全可约的 (选择公理在线), 即 $V$ 是不可约酉子表示的完备直和.

为了避免一些拓扑学上诡异的现象发生, 我们总假定群作为拓扑空间的性质是好的, 比方说是个光滑流形, 群运算都是流形上的光滑映射 (这样的群叫做李群, 这是最常见最重要的情况, 我们完全可以只讨论李群的情况), 或者至少满足足够好的可数性和分离性公理. 具体假设我们不作详细讨论.

我们这一节总假设 $G$ 是紧群. 这些群上都有一个 (左右均) 不变测度, 叫做 Haar 测度. 有限群上取平均的操作 $|G|^{-1}\sum_{g\in G}$ 在紧群的情况用积分 $\int_G \mathrm{d}g$ 代替 (想想有限群上的 Haar 测度是啥). 这样有限群的结论几乎可以平行地搬到紧群上. 个别情况我们需要进一步使用一些泛函分析的基本结果, 我们重点解释这些步骤, 其他结论的平行搬运工作就留给大家来完成.

### 7.1.1 定理

设 $(\rho,V)$ 是 $G$ 的酉表示, 那么 $V$ 包含有限维子表示. 特别的, $G$ 的不可约酉表示都是有限维的.

证明: 首先任取一个有限维子空间 $W\subset V$, 令 $T_0: V\to W$ 是正交投影. 考虑算子

$$T=\int_G \pi(g)\circ T_0\circ\pi(g^{-1})\mathrm{d}g.$$

则 $T$ 是紧算子 (有限秩算子的极限). 由于 $T_0$ 是自伴随算子, 简单的换元可以看出 $T$ 也是自伴随算子, 同时 $T$ 与任意的 $\rho(g)$, $g\in G$ 交换.

现在说明 $T\neq 0$. 任给 $v\in V$, 我们有

$$\langle Tv,v\rangle=\int_G\langle T_0\pi(g^{-1})v,\pi(g^{-1})v\rangle\mathrm{d}g.$$

由于 $T_0$ 是投影算子, 对于任意的 $w\in V$, 我们总有 $\langle Tw,w\rangle\geq 0$. 我们当然也可以找到某个 $v\in V$ 和某个 $g\in G$, 使得 $\langle T_0\pi(g^{-1})v,\pi(g^{-1})v\rangle>0$. 这样就证明了 $T\neq 0$.

根据紧算子的谱定理, $T$ 有不等于零的特征值 $\lambda$ 和特征空间 $V_\lambda$ 满足 $\dim V_\lambda<\infty$. 于是 $V_\lambda$ 是有限维 $G$ 表示. 证毕.

以后我们说表示, 如果没有特别说明, 都是指有限维酉表示. 有限群表示的各种操作, 比方说张量积, 对偶, 等等都可以对紧群的表示谈. 注意, 如果表示是无限维的, 这些操作都是要考虑拓扑性质的. 谢天谢地, 我们只考虑有限维酉表示.

#### 7.1.2 Schur 引理

如果 $V, W$ 都是不可约表示，那么

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, & V \simeq W; \\ 0, & V \not\simeq W. \end{cases}$$

特别的, $V$ 不可约当且仅当 $\operatorname{Hom}_G(V, V)$ 是一维的.

证明跟有限群的情况完全一样.

### 7.2 特征标

设 $(\pi, V)$ 是 $G$ 的有限维表示, 我们定义 $\pi$ 的特征标为 $G$ 上的函数

$$\Theta_\pi(g) = \operatorname{Trace}(\pi(g)).$$

记号跟有限群不太一样. 我们在这里采用的记号跟 Harish-Chandra 理论的记号是一致的.

有限群特征标的性质很多紧群上都有, 比方说我们在第二节最开始谈到的那些结论都对. 大家试着写写看?

我们也有正交关系.

#### 7.2.1 定理

假设 $\pi, \sigma$ 是 $G$ 的不可约表示, 那么

$$\int_G \Theta_\pi(g)\overline{\Theta_\sigma(g)}\mathrm{d}g = \delta_{\pi,\sigma}\operatorname{vol}(G).$$

证明跟有限群的情况完全一样.

### 7.3 矩阵系数

类似于有限群的情况, 我们也有关于矩阵系数的讨论. 特别的, 我们有这样的结果.

#### 7.3.1 引理

设 $\pi$ 和 $\sigma$ 是 $G$ 的不可约表示, $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, $w \in \sigma$, $w^\vee \in \sigma^\vee$. 如果 $\mathrm{d}g$ 是满足 $\operatorname{vol}(G) = 1$ 的 Haar 测度, 那么

$$\int_G \langle \pi(g)v, v^\vee\rangle\langle w, \sigma^\vee(g)w^\vee\rangle \mathrm{d}g = \begin{cases} 0, & \pi \not\simeq \sigma; \\ (\dim \pi)^{-1}\langle v, w^\vee\rangle\langle w, v^\vee\rangle, & \pi \simeq \sigma. \end{cases}$$

特别的, 不同表示的矩阵系数都是线性独立的.

证明跟有限群的情况完全一样.

我们考虑 $G$ 上的连续函数空间 $C(G)$ 和平方可积函数空间 $L^2(G)$, 分别赋予之一致范数和 $L^2$ 范数. 群 $G$ 左右正则作用在 $C(G)$ 和 $L^2(G)$ 上. 我们为什么一定要研究正则表示? 首先, 它包含了所有的不可约表示; 其次, 你具体写个别的表示下来给我看看? 紧群的 Peter–Weyl 定理研究 $C(G)$ 和 $L^2(G)$ 在 $G\times G$ 左右正则表示下的分解. 我们先看一个简单的结论. 初看上去可能有些让人迷惑, 但究其根本, 终究只是定义的同义反复而已. 毛主席教导我们: 一切看似复杂的定理都是纸老虎. 说的就是这么个事情.

### 7.3.2 引理

设 $V$ 是 $C(G)$ 中有限维 $G$ 不变子空间, 那么 $V$ 中的元素能写成 $G$ 上不可约表示矩阵系数的有限和.

证明: 由于 $V$ 是有限维的, 它一定是有限维不可约表示的直和. 所以我们只用考虑 $V$ 自己就是不可约表示的情况. 由于 $V$ 是 $C(G)$ 的子空间, $V$ 上有线性函数 $\ell: V\to\mathbb{C}$, $\ell(f)=f(1)$. 给定 $f\in V$, 我们有

$$f(g)=\mathsf{R}(g)f(1)=\langle \mathsf{R}(g)f,\ell\rangle.$$

证毕.

## 7.4 代表函数和 Plancherel 公式

从现在开始我们记 $\widehat{G}$ 为 $G$ 所有不可约表示的同构类. 由矩阵系数的正交关系, 我们自然有单射 (作为 $G\times G$ 的表示)

$$\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}}\pi\otimes\pi^\vee\to L^2(G).$$

我们记 $R(G)$ 为所有有限维表示矩阵系数在 $L^2(G)$ 中生成的子空间, 其中的函数称为代表函数 (这样的函数当然是连续的啦). 简单的计算告诉我们 $R(G)$ 在卷积和共轭下封闭. 我们当然有

$$R(G)\subset C(G)\subset L^2(G).$$

矩阵的正交关系能得到下面的定理, 证明是很容易的. 鉴于它的重要性我们单独提出来谈.

### 7.4.1 定理

设 $f\in R(G)$. 那么

$$f(g)=\sum_{\pi\in\widehat{G}}\dim\pi\,\mathrm{Trace}(\pi(g^{-1})\pi(f)).$$

还是老规矩, 证明留作习题 (套用引理 7.3.1很快就搞定啦). 注意这里由于假设 $f\in R(G)$, 我们不需要做任何收敛性上的考虑.

### 7.4.2 注记

我们在 $\widehat{G}$ 上赋予测度, 使得 $(\pi, V) \in \widehat{G}$ 的测度是 $\dim V$. 在这样的测度下, 我们可以把上面的 Plancherel 公式写成

$$f(g) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Trace}(\pi(g^{-1})\pi(f))\mathrm{d}\pi.$$

对一般的群 (局部紧, 不见得紧) 也对, 即在 $\widehat{G}$ 上存在唯一一个测度使得 (类似的) 上面的公式也成立. 只不过 $\widehat{G}$ 变得很复杂, $\mathrm{d}\pi$ 也一般算不出来, 对 $f$ 光滑性和增长条件的要求也是很有学问的. 这个测度称为 Plancherel 测度. 它的存在性证明颇为复杂, 在 Dixmier 的书 *$C^*$-Algebra* 里可以找到. 存在性的证明不需要把这个测度具体构造出来 (当然在这样的一般假设条件下也没法具体构造出来). 如果 $G$ 是既约代数群, Harish-Chandra 给出了 Plancherel 测度的准确构造. 这个计算过程很长, 可以参考 Harish-Chandra 的 Collected works 中的很多篇文章, 或者是 Arthur 的博士论文, $p$-adic 群也可以参考 Waldspurger 的 (长) 文章 *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*.

Plancherel 公式是群上调和分析的一大亮点. 它一开始就在表示论中占据着中心的位置, 用现代人的话说就是 “C 位出道”. 当然它也是对得起它的地位的. 它是表示论中最重要的工具之一, 也是很多表示论工作的出发点.

后面我们会看到两个具体的例子, 敬请期待.

## 7.5 Peter–Weyl 定理: 正则表示的幽灵不散

好了, 高潮留到结尾. 我们正式请出这一节的嘉宾, 啊不, 主定理.

### 7.5.1 定理

1. 群 $G$ 上所有连续函数都可以由矩阵系数一致逼近.

2. 代表函数的全体 $R(G)$ 在 $C(G)$ 中和 $L^2(G)$ 中都是稠密的.

证明: 显然第一个结论推出第二个. 回忆一下有限群的情况我们直接数数维数就搞定了. 但是现在比较悲剧, 没有维数可以比较. 给定 $f \in C(G)$, 我们现在证明矩阵系数能一致逼近之. 给定 $\epsilon > 0$. 证明分几步.

第一步, 找一个 $1 \in G$ 的小邻域 $U$, 满足 $U^{-1} = U$, 且对于所有的 $g, h \in G$ 满足 $gh^{-1} \in U$ 有 $|f(g) - f(h)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. 再取一个实值连续函数 $\varphi \in C(G)$, 使得 $\mathrm{supp}\,\varphi \subset U$, $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$, $\int_G \varphi(g)\mathrm{d}g = 1$ (想想看这个函数怎么得到? 你可以假设群是个微分流形以回避一些点集拓扑学). 定义左乘卷积算子 $T_\varphi : L^2(G) \to C(G)$,

$$T_\varphi f(g) = \int_G \varphi(x) f(x^{-1}g)\mathrm{d}x.$$

显然这不是零算子. 我们 $\varphi$ 取法的要点是, 对于任意的 $g \in G$, 我们总有

$$|T_\varphi f(g) - f(g)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

第二步, 用 Arzela–Ascoli 定理可以证明 $T_\varphi$ 是一个自伴随紧算子 (这里伴随算子的定义由 $L^2$ 内积给出). 所以利用自伴随算子的谱定理我们有

$$V = V_0 \bigoplus \bigoplus_i V_{\lambda_i}$$

在 $L^2(G)$ 中稠密, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 是 $T_\varphi$ 的所有非零特征值, $V_{\lambda_i}$ 是 (有限维) 特征子空间 (注意到 $V_{\lambda_i} \subset C(G)$), $V_0 = \operatorname{Ker} T_\varphi$. 所以 $f$ 是 $f_j \in V$, $j = 1, 2, \cdots$ 的 $L^2$ 极限. 由于紧算子是全连续算子 (对于当前这个问题这两个条件等价), 我们知道 $T_\varphi f$ 是 $T_\varphi f_j$ 的一致极限. 因为 $T_\varphi V_0 = 0$, $T_\varphi V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$, 我们得到 $T_\varphi f$ 是 $f'_j$, $j = 1, 2, \cdots$ 的一致极限, 其中 $f'_j \in \oplus_i V_{\lambda_i}$. 所以存在 $j_0$ 使得如果 $j > j_0$ 我们有

$$|T_\varphi f(g) - f'_j(g)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

对于任意的 $g \in G$ 都成立.

第三步, 费了这么半天劲终于可以收获劳动的果实了. 前面两步说明我们找到了一列函数 $f'_j \in \oplus_i V_{\lambda_i}$, 使得

$$|f(g) - f'_j(g)| \leq \epsilon$$

对于所有的 $j > j_0$ 和所有的 $g \in G$ 都成立. 我们只需要说明 $f'_j$ 能写成矩阵系数的有限和就可以了. 这很容易. 因为 $T_\varphi$ 与右正则表示交换 (废话, $T_\varphi$ 是用左正则表示做的卷积). 所以 $V_{\lambda_i}$ 是右正则表示 $C(G)$ 的有限维不变子空间. 于是根据引理 7.3.2, $V_{\lambda_i}$ 里的元素都能写成矩阵系数的有限线性组合. 证毕.

下面这些习题都是 Peter–Weyl 定理的简单推论. 难的部分我已经帮大家证明啦, 大家来做点简单的吧.

建议练习题.

1. 设 $1 \neq g \in G$. 那么存在不可约表示 $(\pi, V)$ 使得 $\pi(g) \neq \mathbf{1}_V$.

2. 我们说 $G$ 上的类函数是指 $G$ 上满足对于任意 $g, h \in G$ 有 $f(h^{-1}gh) = f(g)$ 的函数. 证明

$$\{\Theta_\pi \mid \pi \in \widehat{G}\}$$

   是平方可积类函数空间的一组标准正交基.

# 8 Fourier 转世重生

## 8.1 问题的提出

还是假设 $G$ 是紧群. 在 $G$ 上我们总是去全测度等于 1 的 Haar 测度. 现在我们重新考虑 Peter–Weyl 定理. 最要紧的部分是说连续函数可以用矩阵系数一致逼近. 于是有 $G \times G$ 表示同态

$$\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \pi \otimes \pi^\vee \to L^2(G),$$

其象是稠密的. 我们的问题是:

1. 怎么能在左边事先给定范数, 使得上面的映射是等距, 从而有 Hilbert 空间同构
$$\widehat{\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}}} \pi \otimes \pi^\vee \to L^2(G),$$
2. 反过来的同构怎么给?
3. 左右两边都有 Banach 代数结构, 这个同构是不是 Banach 代数同构? (你要是不知道这个是什么, 就只看两边的环结构, 不管拓扑)

## 8.2 Hilbert–Schmidt 范数

假设 $\pi$ 是不可约表示. 我们在 $\mathrm{End}(\pi)$ 上定义对合如下. 如果 $A \in \mathrm{End}(\pi)$, $\pi$ 上有 hermitian 形式 $\langle -, - \rangle : V \otimes V \to \mathbb{C}$, 那么我们定义 $A^* \in \mathrm{End}(\pi)$ 为

$$\langle Av, v' \rangle = \langle v, A^* v' \rangle.$$

进一步我们在 $\mathrm{End}(\pi)$ 上定义 Hilbert–Schmidt 范数 $\|A\|_\pi^2 = \mathrm{Trace}\, AA^*$. 这是高大上的说法, 接地气的做法如次. 取 $V$ 的一组标准正交基 $v_1, \cdots, v_n$, 定义

$$\|A\|_\pi^2 = \sum_{i=1}^n \langle Av_i, Av_i \rangle.$$

更通俗的说法是, 在这组基下把 $A$ 的矩阵写下来, 然后定义 $A$ 的范数是矩阵的 $L^2$ 范数. 请大家自己验证高大上和接地气是等价的 (大家要学会雅俗共赏对吧, 既要阳春白雪, 又要下里巴人). 另外请大家验证对合与范数的定义与 hermitian 形式的选择无关. 一个简单的观察是这个范数是由内积诱导的. 请问这个内积是啥?

由于每个 $\mathrm{End}(\pi)$ 都是 Hilbert 空间 (有限维内积空间), 我们在

$$\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \mathrm{End}(\pi)$$

上定义内积如下. 如果 $A = (A_\pi)_\pi$, 那么定义范数

$$\|A\|^2 = \sum_\pi \|A_\pi\|_\pi^2.$$

同样这个范数是由内积诱导的. 再次请问这个内积是啥?

现在我们可以做 Hilbert 空间直和

$$\widehat{\mathcal{E}}(G) = \widehat{\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}}} \operatorname{End}(\pi).$$

其中的元素形如 $A = (A_\pi)_\pi$, 且满足

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} \|A_\pi\|_\pi^2 < \infty.$$

我们赋予它代数结构如下: 如果 $A = (A_\pi)$, $B = (B_\pi)$, 那么

$$AB = ((AB)_\pi), \quad (AB)_\pi = (\dim \pi)^{-\frac{1}{2}} A_\pi \circ B_\pi.$$

于是 $\widehat{\mathcal{E}}(G)$ 是 Banach 代数.

### 8.3 Fourier 变换

现在设 $(\pi, V)$ 是 $G$ 的 (有限维) 表示, $f \in L^2(G)$, 那么 $f$ 自然作用在 $V$ 上: 取

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v\mathrm{d}g$$

就好. 由于 $V$ 是有限维的, 随便在上面取定一个范数 (所有的都是等价的), 可以证明这个积分在 $V$ 中收敛. 你当然要用到 $G$ 的紧致性和表示 $\pi$ 的连续性了. 我们也可以这样理解 $L^2(G)$ 在 $V$ 是上的作用. 考虑 $f \in L^2(G)$, $v \in V$. 那么 $\pi(f)v \in V$ 是 $V$ 中唯一满足

$$\langle \pi(f)v, w \rangle = \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w \rangle \mathrm{d}g$$

的元素. 用 Cauchy 不等式我们知道这个积分是收敛的. 由于我们考虑的是有限维酉表示, 这样的定义当然是合理的.

我们这里要简单讨论一下同构 $\operatorname{End}(\pi) \simeq \pi \otimes \pi^\vee$ (见第一节的习题). 我们有两种方法来看这个同构. 首先如果 $v \otimes v^\vee \in \pi \otimes \pi^\vee$, 那么我们可以简单粗暴地定义一个自同态 $T_{v,v^\vee} : \pi \to \pi$, $w \mapsto \langle w, v^\vee \rangle v$. 另一方面, 矩阵系数是 $G$ 上的连续函数 $f_{v,v^\vee}(g) = \langle v, \pi^\vee(g)v^\vee \rangle$, 于是有 $\pi(f_{v,v^\vee}) \in \operatorname{End}(\pi)$. 这两个定义都能给出同构 $\operatorname{End}(\pi) \simeq \pi \otimes \pi^\vee$, 但这两个定义是不一样的. 接下来的各种论断请大家自己拿出纸和笔做计算! 不要怕费墨费纸! 具体来说, 用矩阵系数的正交关系我们有

$$\pi(f_{v,v^\vee}) = (\dim \pi)^{-1} T_{v,v^\vee}.$$

我们也有 (这个纯粹就是定义)

$$\operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})T_{v,v^\vee}) = f_{v,v^\vee}(g).$$

类似的, 我们可以将 $\pi^\vee$ 与 $\overline{\pi}$ 通过 $\pi$ 上的内积等同起来, 于是 $\pi^\vee$ 也有内积. 用矩阵系数的正交关系我们也可以很容易地检验

$$\|\pi(f_{v,v^\vee})\|_\pi = (\dim \pi)^{-1} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v^\vee, v^\vee \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

我们也有

$$\|f_{v,v^\vee}\|_{L^2}=(\dim\pi)^{-\frac{1}{2}}\langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v^\vee,v^\vee\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

于是我们就得到了如下的重要结论.

### 8.3.1 引理

对每一个 $(\pi,V)\in\widehat{G}$, $\dim V=n$, 我们取 $V$ 的一组标准正交基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$, 那么

$$\{n^{\frac{1}{2}}\langle v_i,\pi^\vee(g)v_j\rangle\mid 1\le i,j\le n\}$$

是 $\pi\otimes\pi^\vee$ 在 $L^2(G)$ 中的象的标准正交基. 当 $\pi$ 跑遍所有的不可约表示的时候, 这样选出的基组成了整个 $L^2(G)$ 的标准正交基.

证明: 第一个结论就是前面的讨论. 第二个结论从 Peter–Weyl 定理直接得到.

这个引理很重要, 一定要体会 Peter–Weyl 定理在这里起的决定性作用.

### 8.3.2 引理

1. 如果 $f\in L^2(G)$, 那么
$$\sum_{\pi\in\widehat{G}}\dim\pi\ \|\pi(f)\|_\pi^2<\infty.$$
2. 如果 $A\in\widehat{\mathcal{E}}(G)$, 那么
$$\sum_{\pi\in\widehat{G}}(\dim\pi)^{\frac{1}{2}}\operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})A_\pi)$$
在 $L^2$ 意义下收敛.

证明: 我们首先回忆一下, 如果 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $\{v_i\mid i\in I\}$ 是标准正交基, $v\in\mathcal{H}$, 那么

$$\|v\|^2=\sum_{i\in I}|\langle v,v_i\rangle|^2.$$

把这个结果用到 $L^2(G)$, 再利用前一个引理, 简单的计算表明

$$\|f\|_{L^2}^2=\sum_{\pi\in\widehat{G}}\dim\pi\ \|\pi(f)\|_\pi^2.$$

于是就证明了第一个收敛性.

现在证明第二个收敛性. 首先搞清楚定义, $L^2$ 收敛的意思是说

$$\sum_{\pi\in\widehat{G}}\dim\pi\ \int_G|\operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})A_\pi)|^2\mathrm{d}g<\infty.$$

用 Cauchy 不等式

$$|\operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})A_\pi)|^2\le\|\pi(g^{-1})\|_\pi^2\|A_\pi\|_\pi^2.$$

再用矩阵系数正交关系得到

$$\int_G \|\pi(g^{-1})\|_\pi^2 \mathrm{d}g = (\dim\pi)^{-1}.$$

由于 $\sum_\pi \|A_\pi\|_\pi^2 \leq \infty$, 我们就得到了第二个收敛性. 证毕.

有了这个引理保证收敛性, 我们定义 Fourier 变换

$$\mathcal{F} : L^2(G) \to \widehat{\mathcal{E}}(G), \quad f \mapsto (\dim\pi)^{\frac{1}{2}}\pi(f).$$

然后再定义 Fourier 反变换

$$\mathcal{F}^{-1} : \widehat{\mathcal{E}}(G) \to L^2(G), \quad A \mapsto \left( g \mapsto \sum_{\pi\in\widehat{G}} (\dim\pi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})A_\pi) \right).$$

有了上面这些定义 (正确地作出定义是难的地方), 下面的定理是很容易验证的.

### 8.3.3 定理

Fourier 变换和反变换都是 Banach 代数同构, 且 $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1} = \mathbf{1}$, $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathbf{1}$.

证明: 我们就检验一下 $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathbf{1}$, 做做样子, 免得你说我太懒, 什么都留成习题. 剩下的部分嘛, 嘿嘿, 你懂的.

由定义, 需要检验对于任意的 $f \in L^2(G)$, 我们有

$$\sum_{\pi\in\widehat{G}} \dim\pi \operatorname{Trace}(\pi(g^{-1})\pi(f))$$

在 $L^2$ 意义下收敛到 $f$. 注意, 这里 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 各自贡献一个 $(\dim\pi)^{\frac{1}{2}}$, 所以前面是 $\dim\pi$. 证明的方法是说, 由于当 $\pi$ 过遍 $\widehat{G}$, $v_i$, $i = 1, \cdots, \dim\pi$, 过遍 $\pi$ 的一组标准正交基的时候, $(\dim\pi)^{\frac{1}{2}}\langle\pi(g)v_i, v_j\rangle$ (或者是它的复共轭) 过遍 $L^2(G)$ 的一组标准正交基 (Peter–Weyl 在线), 我们只需要证明上述等式两边与这组标准正交基的内积是一样的就可以了. 于是我们直接计算左边与 $\overline{\langle\pi(g)v_i, v_j\rangle}$ 的内积得到

$$\sum_{\sigma\in\widehat{G}} \dim\sigma \int_G \operatorname{Trace}(\sigma(g^{-1})\sigma(f))\langle\pi(g)v_i, v_j\rangle \mathrm{d}g.$$

再根据迹的定义有

$$\operatorname{Trace}(\sigma(g^{-1})\sigma(f)) = \sum_i \langle\sigma(g^{-1})\sigma(f)v_i, v_i\rangle = \sum_i \langle\sigma(f)v_i, \sigma(g)v_i\rangle.$$

于是用矩阵系数的正交关系, 上面这个内积等于

$$\dim\pi \int_G \sum_l \langle\pi(f)v_l, \pi(g)v_l\rangle\langle\pi(g)v_i, v_j\rangle \mathrm{d}g.$$

再用正交关系就得到它等于 $\langle\pi(f)v_i, v_j\rangle$. 这当然就是 $f$ 与 $\overline{\langle\pi(g)v_i, v_j\rangle}$ 的内积. 这样就证明了 $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathbf{1}$. 证毕.

### 8.3.4 注记

在这样一般的假设条件下 (仅仅假设 $G$ 是紧群), $C(G)$ 在 Fourier 变换下的象并不怎么容易刻画. 不过大家可以试试看有什么想法. 作为例子, 大家可以考虑 $G = S^1$. 如上一节解释的, 此时 $C(G)$ 就是通常的周期函数, 表示都是一维的, $\mathrm{Trace}\,\pi(f)$ 就是 Fourier 系数. 那么连续函数的全体是恰是 Fourier 级数在 Cesaro 意义下收敛的自身的函数全体. 一般的群当然没有这样的概念.

# 9 紧致二阶矩阵群

我们这一节的目的是让大家看一个最简单的紧致非交换群的例子: SU(2), 把前面学的抽象的理论具体到这个例子看看到底说了什么. 我们学东西不能只学习抽象的框架, 那样无异于在天上飘, 一个不小心摔下来很悲剧. 抽象的框架一定要跟具体的例子联系起来. 时刻记住, 我们不能为抽象而抽象, 抽象都是为具体服务的. 往大了说,

$$\text{具体} \to \text{抽象} \to \text{更广泛的具体} \to \text{更高层次的抽象} \to \cdots$$

是数学发展的一般路线.

## 9.1 紧致二阶酉群的不可约表示

我们考虑群

$$G = \mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

这是最简单的非交换紧群. 我们的目标是构造它所有的不可约表示.

在研究表示之前, 我们来看看 $G$ 的拓扑结构. 显而易见 $G$ 同胚与三维球面. 所以 $G$ 是紧的, 连通的, 单连通的. 回忆一下, 我们在一维球面和三维球面上都有拓扑群结构. 那么别的球面上有没有呢? 结论是没有的, 这是唯二的两个. 这个问题不是平凡的. 但是, 只需要用一点点简单的拓扑学常识就可以证明偶数维球面上没有拓扑群结构. 大家可以尝试一下.

现在来研究 $G$ 的表示. 首先 $G$ 作用在二元多项式环 $\mathbb{C}[x, y]$ 上:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} x = ax - \bar{b}y, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} y = bx + \bar{a}y.$$

或者简单点就是说

$$f(x, y) \mapsto f\left( (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right).$$

一个肤浅的观察是这样的作用保持多项式的次数. 所以如果定义

$$V_n = \{n \text{ 次二元复系数多项式}\},$$

那么 $V_n$ 是 $G$ 的 $n+1$ 维表示. 我们记之为 $(\pi_n, V_n)$.

现在我们计算 $\pi_n$ 的特征标. 注意到, $G$ 上的任何共轭类都包含对角线元素 (怎么证明?). 所以我们只需要计算 $\Theta_{\pi_n}$ 在 $t_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ 上的值. 这个当然很好算, 因为

$$\pi_n(t_\theta) x^k y^{n-k} = e^{i(-n+2k)\theta} x^k y^{n-k}.$$

于是

$$\Theta_{\pi_n}(t_\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(-n+2k)\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$

利用这个计算很容易证明下面的两个结果.

### 9.1.1 引理

这些表示都是不可约表示. (哇, 买群送表示的节奏, 免费得到了这么多表示.)

证明: 真是超级简单. 假设 $W$ 是非零子表示, 那么肯定某个 $\sum a_i x^i y^{n-i} \in W$, 而且至少有一个 $a_i \neq 0$. 利用 $t_\theta$ 的作用我们马上就有只要 $a_i \neq 0$, 那么 $x^i y^{n-i} \in W$. 所以至少有某个 $i$ 使得 $x^i y^{n-i} \in W$. 好了, 现在随便找个 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $ab \neq 0$, 作用一下, 就得到

$$(ax - \bar{b}y)^i (bx + \bar{a}y)^{n-i} \in W.$$

这里面特别的有一个非零项是 $a^i b^{n-i} x^n$. 再用刚才同样的论证就有 $x^n \in W$. 再这么来一发就有

$$(ax - \bar{b}y)^n \in W.$$

这里面所有的 $x^j y^{n-j}$, $j = 0, \cdots, n$, 系数都不等于零. 又来同样的论证就有所有的 $x^j y^{n-j}$ 都在 $W$ 里. 这样就有 $W = V_n$. 证毕.

上面纯粹是线性代数. 我们再来看一个更深刻一点的定理.

### 9.1.2 定理

表示 $\pi_n$, $n = 0, 1, \cdots$, 穷尽了 $G$ 所有的不可约表示.

证明: 我们考虑所有 $\Theta_{\pi_n}(t_\theta)$ (作为 $\theta$ 的函数) 生成的线性空间 $C$. 这里我们都看成 $S^1$ 上的函数, $\theta$ 是角参数. 简单计算我们就知道这其实是 $e^{in\theta} + e^{-in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ 生成的线性空间. 于是所有 $S^1$ 上的连续偶函数函数 $f$ 都能被 $C$ 中的函数一致逼近 (Stone–Weierstrass 定理). 而 $G$ 上的类函数在 $t_\theta$ 上的取值总是偶函数 (想想为啥), 所以 $G$ 上的所有类函数都能被 $C$ 中的函数一致逼近. 这样就做完了. 证毕.

建议练习题.

1. 大家想想怎么构造出 SO(3) 的所有表示? 这里的 SO(3) 是三阶特殊正交群, 具体来说我们有
$$\mathrm{SO}(3) = \{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = 1,\ \det g = 1\}.$$
提示: 这当然要用到前面的构造了. 首先想想 SU(2) 和 SO(3) 有什么关系?

2. 大家还可以想想怎么构造 U(2) 的表示? 这里的 U(2) 是
$$\mathrm{U}(2) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = 1\}.$$
我们考虑的 SU(2) 和 U(2) 有什么关系?

## 9.2 怎样积分?

我好像问了一句废话, 谁还不知道怎么积分? 好了, 现在的问题是这样的. 记 $C^\infty(G)$ 是 $G$ 上所有光滑函数构成的空间. 给你一个 $f \in C^\infty(G)$, 你怎么计算 $\mathrm{Trace}\,\pi_n(f)$? 你当然会说, 简

单啊, 套定义啊, 所有的东西都是现成的. 好了, 那我们来试试. 根据定义, 我们很快就有

$$\operatorname{Trace}\pi_n(f)=\int_G f(g)\Theta_{\pi_n}(g)\mathrm{d}g.$$

然后就傻眼了. 啥? 一般的情况我们只知道 $\Theta_{\pi_n}(t_\theta)$, 并且 $\Theta_{\pi_n}$ 是共轭不变的. 所以呢? 怎么算上面这个积分? 我们需要知道一种方法, 把 $G$ 上的积分分成两步, 一步是在每一个共轭类上积分, 得到一个类函数; 然后在把这个类函数在所有的共轭类组成的空间上积分. 这里我们需要解决的问题是:

1. 共轭类空间是什么?

2. 测度怎么取?

这个问题对一般的 (不见得紧) 拓扑群都是有意义的. 如果 $G$ 是一般的既约代数群, 那么我们有著名的 Weyl 积分公式. 这是表示论和调和分析的基本工具. 这种一般性的结论当然不是这门课我们应该 (或者说可以) 讨论的内容. 如果 $G=\mathrm{SU}(2)$, 这些问题都是比较容易的. 我们将之陈述为下面的引理. 从现在开始我们回到最初的假设, $G=\mathrm{SU}(2)$.

### 9.2.1 引理

如果 $f\in C^\infty(G)$, 那么

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2\int_G f(g^{-1}t_\theta g)\mathrm{d}g\mathrm{d}\theta.$$

注意, 这个公式跟你怎么选择 $G$ 上的 Haar 测度无关, 因为两边都有 $\mathrm{d}g$.

公式的证明需要用到一点点李群和微分流形的常识, 大家如果没有学过的话直接跳过, 并不影响后面的理解. 但是请大家务必要理解这个公式到底说了一件什么事情.

证明: 记 $T=\{t_\theta\mid\theta\in[0,2\pi)\}$. 这是 $G$ 的子群, 同构于 $S^1$. 这个群一般称为紧 Cartan 子群. 考虑映射

$$\rho: T\backslash G\times(0,\pi)\to G\backslash\{1\},\quad (g,\theta)\mapsto g^{-1}t_\theta g.$$

这是微分同胚. 注意这里微分同胚不包括 $\theta=0$ 那个点 (为什么?). 简单的计算表明 $|\det\mathrm{d}\rho|=|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2$. 于是换元积分 (将 $G$ 上的积分换成 $T\backslash G\times(0,\pi)$ 上的积分) 就得到

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g=\int_0^\pi|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2\int_{T\backslash G} f(g^{-1}t_\theta g)\mathrm{d}g\mathrm{d}\theta.$$

群 $T$ 是紧的, 和所有的 $t_\theta$ 交换, 在测度 $\mathrm{d}\theta$ 下测度为 $2\pi$. 所以我们可以把在 $T\backslash G$ 上的积分换成在 $G$ 上的积分再除 $2\pi$. 再有 $t_\theta$ 与 $\theta_{\theta+\pi}$ 共轭. 于是我们就得到了想要的公式. 证毕.

有了上面这个引理, 我们就可以计算 $\operatorname{Trace}\pi_n(f)$. 对 $\theta\in[0,2\pi)$, 定义

$$J(\theta,f)=\frac{1}{2\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\int_G f(g^{-1}t_\theta g)\mathrm{d}g.$$

这个积分往往被称为 $f$ 的 (正则化) 轨道积分 (为什么叫轨道积分?). 用控制收敛定理可以得到 $J(\theta,f)$ 是 $\theta$ 的光滑函数. 这里光滑函数的意思是说将其视为 $\mathbb{R}$ 上的周期函数是光滑的 (或者是说作为 $T\simeq S^1$ 上的函数是光滑的). 简单的计算就得到

$$\operatorname{Trace}\pi_n(f)=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta})J(\theta,f)\mathrm{d}\theta.$$

### 9.2.2 注记

鉴于轨道积分的重要性, 这里单独拿出来谈一下. 轨道积分的研究是一门很大的学问, 在自守表示理论中有基本的重要性 (见补充材料里的群镜理论). 关于李群上的轨道积分, 大家可以参考 Harish-Chandra 的文章或者是 Shelstad 的很多文章. 文章太多了, 我实在是没法一篇篇列出来. 臣做不到啊!

我们要注意到一件事, 就是轨道积分在 $\theta = 0$ 和 $\theta \neq 0$ 的地方有区别. 当 $\theta \neq 0$ 光滑变化时, $t_\theta$ 的共轭类 (作为 $G$ 的二维子流形) 也是光滑变化的. 所以 $J(\theta, f)$ 作为 $\theta$ 的函数在 $\theta \neq 0$ 的光滑性是容易检验的. 但 $\theta = 0$ 的地方, 共轭类 (还是作为子流形) 从一个二维流形变成了一个零维流形 (就是一个点). 也就是说共轭类在 $\theta = 0$ 这个地方的变化是不连续的. 所以 $J(\theta, f)$ 在 $\theta = 0$ 处的光滑性至少从直观上来说并不是显而易见的 (虽然在我们这个情况并不难).

用更精确的话来说, 如果 $\theta \neq 0$, 那么 $t_\theta$ 是正则半单元素; 如果 $\theta = 0$, 那么 $t_\theta$ 是半单的, 但不是正则的. 在一般情况下研究轨道积分在非正则半单元素处的渐进性质是轨道积分研究的主要目标之一. 什么? 没听懂? 没关系, 知道上面直观的解释就好. 以后学李群或者代数群的时候你就懂了, 到时候别忘了这个例子.

## 9.3 Plancherel 公式

我们这一小节的目的是证明下面这个公式. 它一般称为群 $G$ 的 Plancherel 公式 (参考 Peter–Weyl 定理那一节最后的注记).

### 9.3.1 定理

对于任意的 $f \in C^\infty(G)$, 我们有

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \operatorname{Trace} \pi_n(f).$$

特别的, 右边是绝对收敛的.

证明: 刚才我们已经计算了 $\operatorname{Trace} \pi_n(f)$. 现在继续. 我们有

$$(n+1) \operatorname{Trace} \pi_n(f) = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta}) J(\theta, f) \mathrm{d}\theta.$$

所以求个和之后就得到

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1) \operatorname{Trace} \pi_n(f) &= \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} e^{in\theta} J(\theta, f) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} J(\theta, f) \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

第二个等号我们用了分部积分 (是不是很神奇?) 我们现在需要引述 Fourier 级数的一个定理: 光滑函数的 Fourier 系数是绝对可求和的, 而且求和收敛到函数在零处的值. 于是就有上面那个求和绝对收敛且等于

$$2\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} J(\theta, f) \Big|_{\theta=0}.$$

最后这个求导很好算. 对于任意的 $\theta$, 我们有

$$2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}J(\theta,f)=2i\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_G f(g^{-1}t_\theta g)\mathrm{d}g+2i\cos\theta\int_G f(g^{-1}t_\theta g)\mathrm{d}g.$$

当 $\theta=0$ 的时候自然就等于 $2if(1)$. 证毕.

建议练习题.

1. 设 $\{T_n\in\mathrm{End}(V_n)\mid n=0,1,\cdots,\}$ 是一族 $V_n$ 的自同态 (不见得是表示的自同态). 当 $T_n$ 满足什么条件的时候存在 $f\in C^\infty(G)$ 使得 $T_n=\pi_n(f)$?
2. 你能推导出 SO(3) 和 U(2) 的 Plancherel 公式吗?

# 10　淡中忠郎重构定理 (二)

作为紧群表示的收尾, 我们这一节的目标是证明紧群 $G$ 的淡中忠郎重构定理. 证明的想法与有限群的情况类似, 但由于 $G$ 不是有限群, 技术上的难度就大多了. 一个重要的区别是: $C(G)$ 不再是 Hopf 代数了, 然后 $G$ 也没法嵌入进去了. 这就比较尴尬了. 所以我们要动脑筋.

## 10.1　遗忘函子的自同构

如同有限群的情况, 我们同样记 $\mathcal{R}(G)$ 为 $G$ 所有有限维表示的范畴, $\mathcal{V}$ 是有限维线性空间范畴, $F : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{V}$ 是遗忘函子. 我们依然记 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 为 $F$ 保持张量积结构的自同构组成的群. 当然了, 我们还是有群同态　$T : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$. 我们最终的目标是证明这个群同态是同构, 但这个太难了. 所以我们先定个小目标: 证明 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是一个紧群.

考虑 $F$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(F)$ (不用保持张量积结构). 我们有自然的映射

$$\mathrm{Aut}(F) \to \prod_{(\pi,V)\in\widehat{G}} \mathrm{GL}(V), \quad \phi \mapsto \left(\phi_{(\pi,V)}\right)_{(\pi,V)\in\widehat{G}}.$$

右边自然是一个拓扑群 (这是个无穷乘积, 想清楚用的是什么拓扑). 我们赋予 $\mathrm{Aut}(F)$ 使得此映射连续的最弱的拓扑.

### 10.1.1　引理

这个映射是拓扑群同构.

证明: 单射是显然的, 因为每个有限维表示都是不可约表示的直和. 满射也是简单的同义反复. 假设对于每个 $(\pi,V) \in \widehat{G}$, 我们都有 $\psi_{\pi,V} \in \mathrm{GL}(V)$. 现在考虑一个有限维表示 $(\sigma,W)$. 我们总有同构

$$\lambda : (\sigma,W) \simeq \bigoplus_{(\pi,V)} V \otimes \mathrm{Hom}_G(V,W).$$

我们定义

$$\psi_{(\sigma,W)} = \lambda^{-1} \circ \left( \bigoplus_{(\pi,V)} \psi_{(\pi,V)} \otimes \mathbf{1} \right) \circ \lambda.$$

再定义 $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$ 使得对于任意有限维表示 $(\sigma,W)$ 我们有 $\phi_{(\sigma,W)} = \psi_{(\sigma,W)}$. 那么 $\phi$ 是 $(\psi_{(\pi,V)})_{(\pi,V)}$ 的原像.

我们证明了群同构. 这进一步是拓扑群同构的事实来自于我们对 $\mathrm{Aut}(F)$ 拓扑的定义 (我们几乎就是说定义拓扑使得这个是拓扑群同构咯). 证毕.

### 10.1.2　引理

群 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是紧群.

证明: 任意的 $(\pi,V) \in \widehat{G}$ 都是酉表示, 所以存在 (差一个常数意义下唯一的) Hermitian 形式

$$\alpha : V \otimes V \to \mathbb{C},$$

并由此诱导双线性形式 (这是 $G$ 表示映射, 这是我们用双线性型的原因)

$$\beta : V \otimes \overline{V} \to \mathbb{C}.$$

设 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, 则 $\beta \circ \phi_{(\pi\otimes\overline{\pi}, V\otimes\overline{V})} = \phi_{\mathbb{C}} \circ \beta$. 由于 $\phi$ 保持张量积结构, 如果 $x, y \in V$, 那么我们有

$$\beta(\phi_{(\pi,V)}(x), \phi_{(\overline{\pi},\overline{V})}(\overline{y})) = \beta(x, \overline{y}).$$

这等价于 $\alpha(\phi_{(\pi,V)}(x), \phi_{(\pi,V)}(y)) = \alpha(x, y)$. 换言之, $\phi_{(\pi,V)} \in \mathrm{U}(V)$ (保持 hermitian 形式 $\alpha$ 的酉群, 是紧群). 这样我们就证明了 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是紧群

$$\prod_{(\pi,V)\in\widehat{G}} \mathrm{U}(V)$$

的闭子群. 所以 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是紧群.

## 10.2 封闭表示族

我们考虑 $G$ 的一族 (有限维) 表示, 记作 $\mathcal{X}$. 我们说 $\mathcal{X}$ 是封闭的, 如果 $\mathcal{X}$ 满足如下的一大把条件.

1. 如果 $\pi_1 \in \mathcal{X}$, $\pi_1 \simeq \pi_2$, 那么 $\pi_2 \in \mathcal{X}$.
2. $\mathcal{X}$ 在直和与张量积下封闭.
3. 如果 $\pi \in \mathcal{X}$, 那么 $\overline{\pi} \in \mathcal{X}$, $\pi$ 的所有子表示也属于 $\mathcal{X}$.
4. $\mathcal{X}$ 包含平凡表示.

我们把 $\mathcal{X}$ 中表示的矩阵系数在 $C(G)$ 中生成的子空间记作 $R(\mathcal{X})$, 其中的函数称为代表函数. 注意到 $R(\mathcal{X})$ 是 $C(G)$ 的子代数.

### 10.2.1 引理

设 $\mathcal{X}$ 是封闭的. 如果对任意的 $1 \neq g \in G$, 都有 $\pi \in \mathcal{X}$ 满足 $\pi(g)$ 不是恒等映射, 那么 $\mathcal{X}$ 包含 $G$ 所有的表示.

证明: 假设条件告诉我们 $R(\mathcal{X})$ 里的函数能分离 $G$ 上的点且在复共轭之下封闭, 所以根据 Stone–Weierstrauss 的定理, $R(\mathcal{X})$ 在 $C(G)$ 中稠密. 另一方面, 如果 $\mathcal{X}$ 不包含某个表示, 那么它一定不包含某个不可约表示 (否则所有的表示都在 $\mathcal{X}$ 里了, 因为 $\mathcal{X}$ 对直和封闭). 于是这个表示的矩阵系数与所有 $R(\mathcal{X})$ 中的函数正交 (这里用到了引理 7.3.1). 这当然是矛盾的. 证毕.

## 10.3 同义反复

我们有自然的群同态 $T : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$. 容易验证这是拓扑群同态 (套定义!). 于是 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的表示自动是 $G$ 的表示, 所以我们有拉回函子

$$T^* : \mathcal{R}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)) \to \mathcal{R}(G).$$

### 10.3.1 引理

此函子是范畴等价.

证明: 我们定义扩张函子如下. 设 $(\pi, V)$ 是 $G$ 的表示. 我们定义 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 在 $V$ 上的作用如下. 设 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, $v \in V$, 定义 $\phi.v = \phi_{(\pi,V)}(v)$. 我们记这个作用为 $\pi^{+}$. 这样我们就从 $G$ 的表示得到了 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的表示. 容易验证这是一个函子. 我们记这个函子为

$$T_* : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)), \quad (\pi, V) \mapsto (\pi^{+}, V).$$

进一步很容易验证函子 $T_*$ 保持表示的直和张量积和复共轭. 所以函子 $T_*$ 的像是 $\mathcal{R}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F))$ 的全子范畴, 其中的对象记为 $\mathcal{X}$. 则 $\mathcal{X}$ 构成 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的封闭表示族. 此表示族 $\mathcal{X}$ 当然能分离 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的点 (这是个同义反复, 大家自行检验). 所以 $\mathcal{X}$ 包含了 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 所有的表示. 于是 $e$ 是范畴等价. 再有 $T^*T_*$ 是恒等函子 (这也是同义反复), 所以 $T^*$ 也是范畴等价.

## 10.4 重构定理

现在我们考虑函数的限制. 显然我们有代数同态 $T^* : R(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)) \to R(G)$.

### 10.4.1 引理

代数同态 $T^*$ 是同构.

证明: 还是刚才那个套路, 我们定义另外一个方向的同态, 这里要用到 Plancherel 公式.

设 $f \in R(G)$, 那么根据 Plancherel 公式, 我们有

$$f(g) = \sum_{(\pi,V)\in\widehat{G}} \dim V \,\mathrm{Trace}(\pi(f)\pi(g)).$$

现在定义 $T_*(f) \in R(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F))$ 如下.

$$T_*(\phi) = \sum_{(\pi,V)\in\widehat{G}} \dim V \,\mathrm{Trace}(\pi(f)\pi^{+}(\phi)).$$

这里 $\pi^{+}$ 的定义见上面一个引理的证明. 根据前一个引理, $(\pi, V) \mapsto (\pi^{+}, V)$ 给出了 $\widehat{G}$ 与 $\widehat{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)}$ 的一一对应. 于是 $T_*$ 是双射. 由于 $T^* \circ T_*$ 是恒等映射, 所以 $T^*$ 也是双射. 证毕.

### 10.4.2 定理

群同态 $T : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是同构.

证明: 单射是显然的. 如果 $1 \neq g \in G$, 由 Peter–Weyl 定理, 存在 $(\pi, V) \in \widehat{G}$, 使得 $\pi(g) \neq \mathbf{1}_V$. 于是 $T(g)_{(\pi,V)} \neq 1$.

现在证明 $T$ 是满射. 在 $G$ 和 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 分别取 Haar 测度 $\mathrm{d}g$ 和 $\mathrm{d}\phi$, 满足全空间测度等于 1. 我们要证明: 如果 $f \in C(G)$, 那么

$$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} T_* f(\phi)\mathrm{d}\phi = \int_G f(g)\mathrm{d}g.$$

或者说等价的, 对于任意的 $f' \in C(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F))$, 有

$$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} f'(\phi)\mathrm{d}\phi = \int_G T^* f'(g)\mathrm{d}g.$$

我们就证明第一个. 这其实也是显然的, 只需要套用定义就好. 由于 $R(G)$ 在 $C(G)$ 中稠密, 我们不妨假设 $f \in R(G)$. 于是我们有

$$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} T_* f(\phi)\mathrm{d}\phi = \sum_{(\pi,V)\in\widehat{G}} \dim V \int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} \mathrm{Trace}(\pi(f)\pi^+(\phi))\mathrm{d}\phi.$$

注意这里是有限和所以可以随便交换顺序. 由正交关系, 右边就等于 $\int_G f(g)\mathrm{d}g$.

现在假设 $T(G) \neq \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$. 于是 $T(G)$ 是闭集, 其补集是开集. 我们取 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的某个正值函数 $f$ , $\operatorname{supp} f \cap T(G) = \emptyset$. 那么

$$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} f(\phi)\mathrm{d}\phi > 0, \quad \int_G T^* f(g)\mathrm{d}g = 0.$$

这样就得到矛盾. 证毕.

# 11 非紧二阶矩阵群

作为紧群的对比, 我们这一节简单讨论一下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, 或者说更准确的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的不可约表示. 这里的讨论当然是不彻底的和极其初步的, 作为一门短课, 我们当然不可能系统地研究这些表示. 这一节主要结果是构造一些不可约表示, 然后不加证明的陈述关于这些表示的一些定理. 我们的主要目的是通过这些例子向大家说明非紧群和紧群的一些基本的区别. 关于非紧李群表示的研究直到今日依然是极其活跃的方向.

我们回忆一下, 所谓的表示都是指酉表示, 即群通过酉算子连续作用在 Hilbert 空间上. 所谓的子表示指的是酉子表示, 不可约表示是说不存在非平凡的 (酉) 子表示. Schur 引理对酉表示也成立. 具体说就是两个不同构的酉表示之间没有非平凡 (表示) 映射, 不可约表示自己到自己的映射只能是常数.

当然了, 我们后面会看到, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在很多拓扑线性空间上有自然的连续作用, 而这些作用是不能找到合适的内积使之成为酉表示的. 所以为了做进一步的研究, 我们自然要扩大表示的定义, 不能只考虑酉表示. 这些当然是后话.

我们先来熟悉一下 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的结构. 注意到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中有极大紧子群 (自己证明这个为什么是极大的!)

$$K = \left\{ \kappa_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

还有所谓的 Borel 群

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

由矩阵的极分解我们有 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = BK$. 这个分解在群论中有一个专门的名字叫岩泽 (Iwasawa) 分解. 对, 就是岩泽理论的那个岩泽!

## 11.1 离散序列表示

设 $n \geq 2$ 是整数, $\mathcal{H}$ 是上半平面, 我们考虑

$$\mathscr{D}_n^+ = \left\{ f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \text{ 全纯} \;\middle|\; \|f\|^2 = \int_{\mathcal{H}} |f(z)|^2 y^{n-2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$

定义 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{D}_n^+$ 上的作用由

$$\mathscr{D}_n^+ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) f(z) = (-bz + d)^{-n} f\left( \frac{az - c}{-bz + d} \right)$$

给出. 在范数 $\|\cdot\|$ 下 $\mathscr{D}_n^+$ 是一个 Hilbert 空间, 而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的作用是一个酉表示. 如果这是你第一次看到这个空间, 可能会觉得有点反直觉. 因为表面上看上去收敛性是很弱的, 仅仅是 $L^2$ 意义下收敛, 怎么就能保证极限函数是全纯的呢? 这当然依赖于全纯函数的刚性.

建议练习题.

1. 用 Cauchy 积分公式证明 $\mathscr{D}_n^+$ 是 Hilbert 空间, 特别的, 这个范数是完备的.

2. 证明 $(z+i)^{-n} \in \mathscr{D}_n^+$. 所以 $\mathscr{D}_n^+$ 不是零.

3. 证明 $\mathscr{D}_n^+$ 是无穷维的. 你能具体写点别的函数下来吗?

我们另外定义 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的一个表示叫 $\mathscr{D}_n^-$. 这里

$$\mathscr{D}_n^- = \{\overline{f} \mid f \in \mathscr{D}_n^+\}.$$

而作用由 $\mathscr{D}_n^-(g)\overline{f} = \overline{\mathscr{D}_n^+(g)f}$ 给出.

#### 11.1.1 定理

表示 $\mathscr{D}_n^+$ 是不可约的. 所以 $\mathscr{D}_n^-$ 也是不可约的.

证明: 假设说 $U$ 是一个非平凡子表示, 那么 $U^\perp$ 也是非平凡子表示, 而且 $U \cap U^\perp = 0$. 好了, 现在我们找一个 $f \in U$, $f \neq 0$. 用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的作用挪一挪, 我们可以假设 $f(i) \neq 0$.

注意到 (你得想想这是为什么, 注意对比紧群的情况)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathscr{D}_n^+(\kappa_\theta) f \mathrm{d}\theta \in U.$$

再在 $z \in \mathcal{H}$ 处取值, 做一个换元 $\zeta = \kappa_\theta$ 之后, 经过简 (fù) 单 (zá) 的计算 (我不觉得我有义务代替大家做这个计算) 知道这个积分等于

$$\frac{(2i)^n}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}(z+i+\zeta^2(-z+i))^{-n} f\left(\frac{i(z+i)+\zeta^2(iz+1)}{z+i+\zeta^2(-z+i)}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Cauchy 积分公式或者是留数定理就告诉我们它等于

$$(2i)^n f(i)(z+i)^{-n}.$$

所以 $(z+i)^{-n} \in U$. 但是基于同样的论证我们又有 $(z+i)^{-n} \in U^\perp$. 这怎么可能! 证毕.

我们这一节构造出来的这些表示都叫做 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散序列表示. 更进一步的, $\mathscr{D}_n^+$ 称为全纯离散序列表示, $\mathscr{D}_n^-$ 称为反全纯离散序列表示. 这些表示称为是离散序列表示, 因为它们是用离散集合正整数 $n \geq 2$ 来标记的. 我们之后也会看到, 他们在 Plancherel 公式中是一个离散和, 或者说他们的 Plancherel 测度都是严格正的.

### 11.2 主序列表示

现在定义另外一组表示 $\mathscr{P}^{\pm,iv}$, $v \in \mathbb{R}$. 表示空间都是 $L^2(\mathbb{R})$ (通常的 Hilbert 空间结构), 但是对于不同的 $v \in \mathbb{R}$, 群作用不一样. 这些表示叫做 (酉) 主序列表示.

我们定义

$$\mathscr{P}^{\pm,iv}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) f(x) = \begin{cases} |-bx+d|^{-1-iv} f\left(\dfrac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{if } +, \\ \operatorname{sign}(-bx+d)|-bx+d|^{-1-iv} f\left(\dfrac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{if } -. \end{cases}$$

可以证明, 表示 $\mathscr{P}^{\pm,iv}$ 与 $\mathscr{P}^{\pm,-iv}$ 是同构的 (这个并没有那么容易, 值得上手一试). 还可以证明, 除了 $\mathscr{P}^{-,0}$, 这些表示都是不可约的, 而 $\mathscr{P}^{-,0}$ 分解成两个不可约表示的直和.

我们还可以用抛物诱导表示来描述 $\mathscr{P}^{\pm,iv}$. 设 $\epsilon = \pm 1$. 我们定义

$$I^{\epsilon}(iv)^{\infty} = \left\{ f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \text{ 光滑} \;\middle|\; f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} g\right) = \mathrm{sign}(a)^{\frac{1-\epsilon}{2}} |a|^{1+iv} f(g) \right\}.$$

群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 右正则作用在 $I^{\epsilon}(iv)^{\infty}$ 上. 这些空间当然不是完备的, 我们赋予之内积

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} f_1(\kappa_\theta) \overline{f_2(\kappa_\theta)} \mathrm{d}\theta.$$

可以证明这个内积在群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的作用下是不变的. 这个也不太容易, 值得一试. 当然你要是试不出来就先承认它, 先弄明白我说的话到底是什么意思. 空间 $I^{\epsilon}(iv)^{\infty}$ 在此内积下的完备化记为 $I^{\epsilon}(iv)$. 这是一个 Hilbert 空间, 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 依然右正则作用在上面. 于是定义了一个表示.

### 11.2.1 引理

我们有 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 表示的同构

$$I^{\epsilon}(iv) \to \mathscr{P}^{\epsilon,iv}, \quad f \mapsto \left( x \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ -x & 1 \end{pmatrix}\right)\right).$$

我们不打算详细的写下这个引理的证明. 暂时不管平方可积性的问题. 引理的要点在于, 虽说 $f$ 是群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的函数, 但是它左边乘上上三角矩阵之后值的变化是固定的, 所以 $f$ 的选择其实不多, 能够做出的选择也基本上就是在左下角那个元素. 所以我们把 $f$ 限制在形如 $\begin{pmatrix} 1 & \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的元素上基本上就能涵盖所有的函数. 用数学语言描述就是

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ x & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^{\times},\ b, x \in \mathbb{R} \right\}$$

是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中稠密的开集, 它的补集是是 Zariski 闭集, 所以是零测集. 至于它为什么是表示的同构, 你稍微计算一下就知道了. 你用到的矩阵分解是

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (bx+d)^{-1} & * \\ & bx+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{ax+c}{bx+d} & 1 \end{pmatrix},$$

这里 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $*$ 是一个我们不关心的元素.

当然我们可以对于任意的 $w \in \mathbb{C}$ 定义 $I^{\epsilon}(w)^{\infty}$: 直接将 $iv$ 换成 $w$, 别的条件不变. 但对于这些表示, 我们之前写下来的就不再是内积了. 事实上, 如果 $|\Re w| \geq 1$, 可以证明 $I^{\epsilon}(w)^{\infty}$ 不存在任何 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 不变的内积. 如果 $0 < |\Re w| < 1$, $I^{\epsilon}(w)^{\infty}$ 上存在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 不变内积, 但也不再是上面那种形式了. 设 $0 < |\Re w| < 1$, 我们将 $I^{\epsilon}(w)^{\infty}$ 的完备化记为 $I^{\epsilon}(w)$. 这也是一个不可约 (酉) 表示. 这些表示都叫做补序列表示.

### 11.2.2 定理

离散序列表示, 酉主序列表示和补序列表示穷尽了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 所有的无限维不可约酉表示.

欲知怎么证明, 请听后继课程分解. 这个证明有点长.

### 11.2.3 注记

我们这里看到的 $I^\epsilon(w)^\infty$, $|\Re w| > 1$, 就是一个自然的作用, 但是不能做成酉表示的具体例子. 还有很多这样的例子. 另外还有一些别的例子, 比方说像补序列表示, 上面的描述是最自然的, 虽然可以做成酉表示, 但是硬要做成 Hilbert 空间处理起来反而不方便. 所以表示论需要扩大研究的范围, 或者说调整研究的对象. 处理方法一般有两种. 一种是还是考虑群作用, 但这个空间不一定要是 Hilbert 空间, 而是可以赋予别的某种拓扑, 使之成为完备的拓扑线性空间, 比方说 Fréchet 空间, 或者是 LF 空间等等, 群在这个拓扑之下连续的作用. 另外一种做法是 Harish-Chandra 的伟大发现. 我们不再考虑整个群的作用, 而是只考虑极大紧子群的作用和由原始群作用诱导出的无穷小作用 (也就是李代数的作用). 我们也不考虑原来这个空间了, 而是考虑比这个原来的空间稍微小一点点的线性空间 (一般来说具有某种有限性). 这样做的好处是我们可以完全抛弃所有拓扑学方面的考虑, 而只考虑代数的结构. 这时, 我们考虑的对象不再是整个群的表示, 而是所谓的 $(\mathfrak{g}, K)$-模. 这是深入研究表示论的基础. 一些深刻的结果告诉我们, 本质上来说, 这两种做法是等价的. 我们不做详细讨论. 我们一定要抑制住一直说下去的冲动, 否则这个课的长度就得翻倍还不止了!

### 11.2.4 注记

从一个模形式或者 Maass 波动形式出发可以构造出 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的不可约 (酉) 表示. 如果从模形式出发, 那么得到的是全纯离散序列表示, 模形式的权就对应了上面那个 $\mathscr{D}_n^+$ 中的 $n$. 如果从 Maass 波动形式出发, 得到的要么是酉主序列表示要么是补序列表示. Selberg 猜想是说这些表示只可能是酉主序列表示, 不可能是补序列表示. 这是自守形式理论里最重要的猜想之一. Langlands 纲领里关于自守表示函子性猜想的主要推论之一即 Selberg 猜想. 用已知的函子性加上深刻的解析方法能够得到的最好结果目前是 $|\Re w| < 7/64$. 大家可以参考 Henry Kim 的文章: *Functoriality for the exterior square of* $\mathrm{GL}_4$ *and the symmetric fourth of* $\mathrm{GL}_2$, JAMS 2003.

## 11.3 Plancherel 公式

我们记 $C_c^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上所有的紧支光滑函数的全体. 如果 $f \in C_c^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, $(\pi, V)$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的不可约表示, 那么我们可以跟之前一样定义 $\pi(f)$. 不平凡的地方是说 $\pi(f)$ 是迹类算子, 也就是说 $\operatorname{Trace}\pi(f)$ 是存在的, 或者说

$$\operatorname{Trace}\pi(f) = \sum_v \langle \pi(f)v, v\rangle$$

绝对收敛. 这里 $v$ 跑遍 $V$ 的一组标准正交基.

### 11.3.1 定理

对于任意的 $f \in C_c^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, 我们有

$$f(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Trace}(\mathscr{P}^{+,iv}(f)) v \tanh\left(\frac{\pi v}{2}\right) \mathrm{d}v + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Trace}(\mathscr{P}^{-,iv}(f)) v \coth\left(\frac{\pi v}{2}\right) \mathrm{d}v$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} 4(n-1)\, \mathrm{Trace}(\mathscr{D}_n^+(f) + \mathscr{D}_n^-(f)).$$

注意这个公式跟 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上测度的选择有关, 因为等式的右边函数在表示空间上的作用取决于测度的选择. 具体选择暂时不表.

我们现在把 Plancherel 重新写一下. 首先我们记

$$\mathrm{Temp}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\mathscr{P}^{+,iv} \mid v \geq 0\} \cup \{\mathscr{P}^{-,iv} \mid v > 0\} \cup \{\mathscr{D}_n^+, \mathscr{D}_n^- \mid n \geq 2\},$$

并赋予之显而易见的流形结构 (或者简单点拓扑空间结构). 这个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 一部分表示的同构类的集合, 这些表示称为柔曼表示 (tempered representations). 这个集合称为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的柔曼谱 (tempered spectrum), 它的离散部分, 即 $\mathscr{D}_n^\pm$, $n = 2, 3, \cdots$, 称为离散谱 (discrete spectrum), 剩下两个正维数连通分支称为连续谱. 这是一个测度空间, 其上测度由以下方式给出. 我们规定点 $\mathscr{D}_n^\pm$ 的测度等于 $4(n-1)$, 在 $\mathscr{P}^{+,iv}$ 上给予测度 $2v\tanh\left(\frac{\pi v}{2}\right)\mathrm{d}v$, 在 $\mathscr{P}^{-,iv}$ 上给予测度 $2v\coth\left(\frac{\pi v}{2}\right)\mathrm{d}v$. 于是我们可以把 Plancherel 公式写成

$$f(1) = \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))} \mathrm{Trace}\, \pi(f) \mathrm{d}\pi.$$

这正是之前讲抽象 Plancherel 定理的时候提到的形式. 上面的这个测度当然就是大名鼎鼎的 Plancherel 测度. 这个测度可以通过表示 $\mathscr{P}^{\pm,iv}$ 或者 $\mathscr{D}_n^\pm$ 内蕴地定义. 在这样的定义中自然的就会出现所有的表示 $I^\epsilon(w)^\infty$, $w \in \mathbb{C}$. 这也告诉我们, 即使是我们只关心酉表示, 那些不是酉表示的对象也值得我们研究, 而且是研究的有机组成部分之一. 但这里我们囿于篇幅就不仔细讨论了.

我们用几条注记来结束这个漫长但肤浅的讨论.

### 11.3.2 注记

我们注意到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的不可约表示 (的同构类) 当然远远不止柔曼谱中的这些, 比方说还有补序列表示. 但别的表示都不出现在 Plancherel 公式中. 而柔曼谱中的表示, 恰恰是满足矩阵系数落在 $L^{2+\epsilon}$ 中的那些表示 (别的表示矩阵系数可积性更差). 具体的定义可以参考后面的补充材料. 对于一般的李群, 这件事也对, 或者说, 柔曼谱的定义就是 Plancherel 测度的支集, 而它恰恰包含了所有矩阵系数在群上 $2+\epsilon$ 次可积的表示.

### 11.3.3 注记

Plancherel 公式可以对更广泛的函数成立, 不见得一定要是紧支函数. 能让 Plancherel 公式成立的最大的那个函数空间被称为 Harish-Chandra Schwartz 函数. 这个空间包含所有的紧支

函数, 也包含所有的速减函数. 它的刻画如下. 我们首先在 $\mathscr{P}^{+,0}$ 在中找一个函数 $e_K$, 使得它是 $K$ 不变的, 且 $e(1)=1$. 我们定义

$$\Xi(g) = \int_0^{2\pi} e(\kappa_\theta g)\mathrm{d}\theta.$$

这个函数有个好 (guǐ) 听 (yì) 的名字叫 Harish-Chandra $\Xi$ 函数. 我们再取一个所谓的高度函数, 比方说我们可以就取

$$\varsigma(g) = \log\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

所谓的 Harish-Chandra Schwartz 函数, 指的是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的光滑函数, 满足条件: 对于任意的 $B>0$ 都存在 $C>0$, 使得

$$|f(g)| \leq C\Xi(g)\varsigma(g)^{-B}.$$

这样函数的全体记为 $\mathcal{C}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$. 这是一个 Frechet 空间. 对于这个空间中的元素, Plancherel 公式仍然成立. 这个空间相比 $C_c^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 有很多好处. 这些好处当然只有你进一步学习和操作这些表示的时候才能感觉得到. 所以, 我们还是赶紧接着往后学习吧!

### 11.3.4 注记

比方说我们对每一个 $\pi \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, 都给了一个 $T_\pi \in \mathrm{End}(\pi)$ (当然要求是连续的). 一个有意义的问题是, 到底 $T_\pi$ 要满足些什么条件才能存在 $f \in C_c^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, 使得 $T_\pi = \pi(f)$ 呢? 这个问题问得好! 事实上, 这是一个很困难的问题. 即使在我们这个最简单的情况完整地陈述这个定理都不太容易. 这类结果叫做 Paley–Wiener 定理. 对一般的李群也有类似的问题和结果. 在对表示论和调和分析深入的研究中, 比方说迹公式理论, 起着不可或缺的作用.

这个问题主要的难点在于你要求函数是紧支集的. 如果放弃这个条件而只要求函数落在 $\mathcal{C}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, 这个结果并不困难 (至少描述起来不困难). 这也显示出 Harish-Chandra Schwartz 函数的一部分优越性.

## 11.4 建议练习题

我们研究了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 但还没有研究最简单的局部紧群 $\mathbb{R}$ 呢.

1. 我们这里提到了 Plancherel 公式, Paley–Wiener 定理等等一系列结果. 这些结果都是以 Fourier 变换相应的结果作为原始模型的. 你知道 Fourier 变换的理论中这些结果说的是什么吗?

2. 用表示论的观点, 把 Fourier 变换还有上面提到的这些结果用 $\mathbb{R}$ 的表示论装模作样地解释一番.

3. 我们用 $\widehat{f}$ 记函数 $f$ 的 Fourier 变换. 证明 Poisson 求和公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

4. Poission 求和公式里左右两边都是对 $n \in \mathbb{Z}$ 求和. 但是这两边的 $n$ 代表同样的东西吗?

5. 你能想想 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上有没有类似的求和公式吗? 比方说一边是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的函数做某种操作之后在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上求和? 那你能想象另外一边应该是对什么求和吗?

## 12　一些相对复杂的材料

以下是一些内容较复杂的材料. 材料的难度不稳定, 有些特别难有些相对简单, 具体难度全靠猜. 大家做不完没关系, 拿回家接着慢慢想, 有些材料深入想下去是一些很有意义的没有解决的问题.

### 12.1　李型群表示的特征标

1. 你能不能写下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的特征标表?

2. 你能不能写下 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ Weil 表示的特征标?

### 12.2　坏特征

你能不能写下 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{2^l})$ 的所有表示? 这个情况和我们正文里讨论过的有什么不同?

### 12.3　有限群的限制问题

1. 考虑 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示 $\pi$. 求 $\pi|_{T_s}$ 和 $\pi|_{T_a}$ 的分解. 你能发现什么?

2. 考虑 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示 $\pi_1, \pi_2, \pi_3$. 什么情况下在 $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ 上存在 $G$ 不变三线性形式? 如果有, 有几个?

3. 对比第二问, 对于 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 或者 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^3})$ 你准备怎么提这个问题? 你提的问题你会做吗?

### 12.4　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$

1. 分析 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的共轭类.

2. 研究 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上的限制.

3. 构造所有的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的不可约表示.

别看 $\mathrm{SL}_2$ 好像跟 $\mathrm{GL}_2$ 差得不多, 它们的表示论可以说相去甚远. 在 $\mathrm{SL}_2$ 上 Labesse 和 Langlands 观察到了群的内窥镜现象 (endoscopy), 进而开创了整个自守形式的群镜理论. 作为这方面的入门可以参考 Labesse 和 Langlands 的著名文章: *L-indistinguishability for* $\mathrm{SL}_2$. 后面还有这方面的一些初步内容.

### 12.5　Gelfand 对合方法

这个问题用到的技术称之为 Gelfand 对合方法. 在证明各种重数一问题中有重要应用. 几乎所有重数一问题的证明都要用到这个方法或者是它的变形. 这里只提及最简单的情况. 大家以后在学习模形式 Hecke 算子的交换性的时候还会遇到它.

固定非平凡加法特征 $\psi:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^\times$. 考虑 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的上三角幺幂子群 $N$ 和 $N$ 的一维表示 $\psi_N\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\right)=\psi(x)$. 令 $\mathcal{W}=\mathrm{Ind}_N^G\psi_N$.

1. 证明 $\mathrm{End}_G(\mathcal{W})$ 同构于代数
$$\mathrm{End}_G(\mathcal{W})'=\{\Delta:G\to\mathbb{C}\mid \Delta(n_1gn_2)=\psi_N(n_1)\Delta(g)\psi_N(n_2),\ n_1,n_2\in N,\ g\in G\}.$$
这里代数的乘法由 $G$ 上函数的卷积给出. 我们把卷积记为 $*$.

2. 定义 $G$ 上的对合
$$g^*\mapsto\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}{}^tg\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}.$$
是对合自动诱导 $\mathrm{End}_G(\mathcal{W})'$ 上的对合 $\Delta^*(g)=\Delta(g^*)$. 证明
$$\Delta_1^**\Delta_2^*=(\Delta_2*\Delta_1)^*.$$

3. 证明 $\Delta\mapsto\Delta^*$ 是 $\mathrm{End}_G(\mathcal{W})'$ 上的恒等映射 (提示: 找一组在对合下不变的基). 由此 $\mathrm{End}_G(\mathcal{W})$ 是交换代数.

4. 证明 $\mathcal{W}$ 作为 $G$ 的表示是重数一的, 这个是说对于 $G$ 的任意不可约表示 $\sigma$, 我们都有
$$\dim\mathrm{Hom}_G(\mathcal{W},\sigma)\le 1.$$

## 12.6 Whittaker 模型

固定加法特征 $\psi:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^\times$. 设 $\pi$ 是 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的一个不可约表示. 所谓 $\pi$ 上的一个 Whittaker 模型 (或者叫 Whittaker 泛函), 是指 $\pi$ 上的一个线性形式 $\ell:\pi\to\mathbb{C}$, 满足条件
$$\ell\left(\pi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}\right)v\right)=\psi(x)\ell(v).$$

1. 哪些不可约表示有 Whittaker 模型? (只要维数不是一都有! 能不能具体写下来? 当然可以, 否则我也不会问你对吧.)

2. 证明如果 $\pi$ 上存在 Whittaker 模型, 那么在相差一个常数的意义下这个模型是唯一的 (不要硬刚正面, 想想怎么用上一题的结果).

## 12.7 新谷提升

考虑 $G_1=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, $G_n=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^n})$. 令 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ 为 Frobenius 元. 群 $G_n$ 上自动有 Frobenius 的作用.

1. 如果存在 $h\in G_n$ 使得 $g_1=h^{-1}g_2h^\sigma$, 那么我们说 $g_1,g_2\in G_n$ 是扭曲共轭的 (twisted conjugate). 我们定义 $G_n$ 上的范数映射 $N:G_n\to G_n$, $g\mapsto Ng=g\mapsto gg^\sigma\cdots g^{\sigma^{n-1}}$. 证明 $Ng$ 通过 $G_n$ 的元素与某个 $G_1$ 中的元素共轭. 我们把这个元素在 $G_1$ 中的共轭等价类记为 $N(g)$. 证明 $g\mapsto N(g)$ 给出了 $G_n$ 上扭曲共轭类到 $G_1$ 上共轭类的一一对应.

2. 对于 $G_n$ 的一个表示 $(\Pi, V)$, 我们定义它的 $\sigma$-扭曲 $\Pi^\sigma$ 为 $\Pi^\sigma(g) = \Pi(g^\sigma)$ (同一个表示空间 $V$). 如果 $\Pi^\sigma \simeq \Pi$, 那么我们说 $\Pi$ 是 $\sigma$-稳定的. 假设 $\Pi$ 是 $\sigma$-稳定的且维数大于一. 证明存在唯一的同构 $I_\sigma : (\Pi^\sigma, V) \simeq (\Pi, V)$, 使得 $I_\sigma^\vee \ell = \ell$. 这里我们固定非平凡加法特征 $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$, $\ell$ 是 $\Pi$ 上由加法特征 $\psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$ 定义的 Whittaker 模型, $I_\sigma^\vee : ((\Pi^\sigma)^\vee, V^\vee) \simeq (\Pi^\vee, V^\vee)$ 是 $I_\sigma$ 的对偶映射.

3. 证明对于 $G_1$ 的任意不可约表示 $\pi$, 存在 $G_n$ 的 $\sigma$-稳定表示 $\Pi$, 使得对于所有的 $g \in G_n$ 都成立
$$\mathrm{Trace}(\pi(N(g))) = \mathrm{Trace}(\Pi(g) I_\sigma).$$
反之对于任意 $G_n$ 的 $\sigma$-稳定表示 $\Pi$, 都存在 $G_1$ 的不可约表示 $\pi$ 使得上式成立.

从这个问题中你能受到什么启发 (Langlands 当年从这个例子里受到了巨大的启发. 你呢? 不要落后了哦).

### 12.8 限制问题

先考虑 $G = \mathrm{SU}(2)$. 记 $T \simeq S^1$, 作为对角线矩阵嵌入到 $G$ 中 (复习一下 $\mathrm{SU}(2)$ 是怎么用矩阵具体实现的).

1. 考虑 $G$ 的表示 $\pi_n$ 和 $T$ 的表示 $\chi_m$. 请问什么时候有
$$\mathrm{Hom}_T(\pi_n, \chi_m) \neq 0.$$
如果它不等于零, 那么它是几维的? 你能具体写一个不等于零的元素下来吗?

现在再考虑 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 依然将 $T \simeq S^1$ 嵌入到 $G$ 中, 但这次作为 $G$ 的极大紧子群嵌进去.

1. 考虑 $G$ 的表示 $\mathscr{D}_n^\pm$. 跟上面一样的问题. 请问什么时候有
$$\mathrm{Hom}_T(\mathscr{D}_n^\pm, \chi_m) \neq 0.$$
如果它不等于零, 那么它是几维的? 你能具体写一个不等于零的元素下来吗? 注意这里的同态都是要求连续哦.

2. 对比一下上面 $n$ 和 $m$ 的条件, 你发现了什么吗?

3. 证明对于任意的 $v \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$ 我们有
$$\dim \mathrm{Hom}_T(\mathscr{P}^{\pm, iv}, \chi_m) = 1.$$
你能具体写一个不等于零的元素下来吗?

### 12.9 张量积

考虑 $G = \mathrm{SU}(2)$.

1. 取 $G$ 的不可约表示 $\pi_1, \pi_2, \pi_3$. 什么情况下 $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ 上存在 $G$ 不变三线性形式?
2. 取 $G$ 的不可约表示 $\pi_1, \cdots, \pi_n$. 怎么将 $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n$ 分解成 $G$ 不可约表示的直和? 这个问题和第一个问题有什么联系?

考虑 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 首先对你要搞清楚怎么对 Hilbert 空间取张量积. 这一般叫做完备张量积. 现在问:

1. 什么情况下 $\mathscr{D}^{\pm}_{n_1} \widehat{\otimes} \mathscr{D}^{\pm}_{n_2} \widehat{\otimes} \mathscr{D}^{\pm}_{n_3}$ 上存在 $G$ 不变 (连续) 三线性形式?
2. 如果把上面的 $\mathscr{D}^{\pm}_{n}$(一个或者所有) 换成 $\mathscr{P}^{\pm, iv}$ 是什么情况?

### 12.10 共轭问题

考虑有限群 $G$ 的两个表示: $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. 我们说 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 是局部共轭的, 如果对于每个 $g \in G$ 我们都能找到 $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (取决于 $g$), 使得 $\rho_1(g) = h^{-1}\rho_2(g)h$. 我们说 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 是整体共轭的, 如果我们都能找到 $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得对于每个 $g \in G$, 我们都有 $\rho_1(g) = h^{-1}\rho_2(g)h$. 证明 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 局部共轭当且仅当整体共轭.

把 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 换成别的群, 比方说 $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, 结论还成立吗?(废话, 当然不一定成立了, 成立的话上一问就让你证明这个了) 注意: 群的连通性是重要的, 否则很简单就能举出反例.

### 12.11 矩阵系数的可积性

我们首先做一些一般性的讨论. 假设 $G$ 是一个局部紧群, 不见得是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (即 $G$ 是拓扑群, 没一点有一个相对紧的开邻域). 所有的李群都满足这个条件.

现在设 $(\pi, V)$ 是 $G$ 的表示. 这里还是跟以前一样, 所谓的表示是指 $G$ 在 Hilbert 空间 $V$ 上的连续保距作用.

1. 陈述并证明 Schur 引理.
2. 设 $Z$ 是 $G$ 的中心. 证明存在 $Z$ 的连续特征 $\chi : Z \to \mathbb{C}^{\times}$, 满足对于任意的 $z \in Z$ 有 $|\chi(z)| = 1$, 使得 $\pi(z) = \chi(z)\, \mathbf{1}_V$.

一般说 $(\pi, V)$ 是不可约平方可积表示, 意思是 $\pi$ 的矩阵系数是平方可积的, 也就是说对于任意的 $v, w \in V$, 总是有

$$\int_{Z\backslash G} |\langle \pi(g)v, w\rangle|^2 \mathrm{d}g < \infty.$$

1. 现在设 $(\pi, V)$ 是不可约平方可积表示. 证明存在只依赖于表示 $\pi$ 和测度选择的常数 $d_\pi$, 使得对于任意的 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, 总有

$$\int_{Z\backslash G} \langle \pi(g)v_1, v_2\rangle \langle v_3, \pi(g)v_4\rangle \mathrm{d}g = \frac{1}{d_\pi} \langle v_1, v_4\rangle \langle v_3, v_2\rangle.$$

这个常数 $d_\pi$ 被称为 $(\pi, V)$ 的形式次数. 如果 $G$ 是紧的, 那么形式次数等于 $V$ 的维数.

2. 现在考虑 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 证明 $\mathscr{D}_n^{\pm}$ 是平方可积的.

3. 我们取一个测度, 使得 $\mathscr{D}_2^{+}$ 的形式次数等于一. 求 $\mathscr{D}_n^{\pm}$ 的形式次数.

还是对一般局部紧群 $G$, 我们说 $(\pi, V)$ 是平方可积表示, 意思是 $\pi$ 的矩阵系数是平方可积的, 也就是说对于任意的 $v, w \in V$, 以及任意的 $\epsilon > 0$, 总是有

$$\int_{Z\backslash G} |\langle \pi(g)v, w\rangle|^{2+\epsilon} \mathrm{d}g < \infty.$$

1. 设 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 证明 $\mathscr{P}^{\pm, iv}$, $v \in \mathbb{R}$ 是几乎平方可积的, 但不是平方可积的.

2. 证明补序列表示连几乎平方可积都做不到啊.

### 12.12 Grothendieck 环的谱

1. 设 $G$ 是有限群, $R(G)$ 是 $G$ 的 Grothendieck 环. 证明 $\operatorname{Spec} R(G)$ 是连通的. 它有多少个不可约分支? 除此之外你还能对它说什么话?

2. 如果 $G$ 是紧群. 你能回答上面同样的问题吗?

### 12.13 群的内窥镜

我们有胃镜肠镜喉镜腹腔镜等等内窥镜, 这里我们要研究一个群的内窥镜理论, 简称群镜. 这是自守形式理论的主要部分之一. 我们的讨论当然是很初步的, 就是告诉大家这个理论的起点是说了一件什么事. 在我们这个简单的例子里, 这是一个纯粹的微积分问题.

我们考虑群 $G = \mathrm{SU}(2)$, $G^* = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 注意 $G$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的子群, 但不是 $G^*$ 的子群. 我们说 $g_1, g_2 \in G^*$ 稳定共轭是说存在 $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, 使得 $g_1 = x^{-1} g_2 x$. 还是沿用之前的记号: $\kappa_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 记 $T = \{\kappa_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的子群.

1. 证明 $g_1 = \kappa_\theta$ 与 $g_2 = \kappa_{-\theta}$ 在 $G^*$ 中不共轭, 但稳定共轭.

2. 证明 $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ 与 $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ 在 $G^*$ 中不共轭, 但稳定共轭.

3. 证明 $G$ 的共轭类可以嵌入到 $G^*$ 的稳定共轭类中: 如果 $g \in G$, 那么取 $\widetilde{g} \in G^*$ 为 $G^*$ 中与 $g$ 有相同特征多项式的半单元素. 这里半单的意思是说在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中可对角化的. 我们记这个嵌入为 $g \rightsquigarrow \widetilde{g}$. 这个嵌入的像是什么?

4. 设 $\widetilde{f} \in C_c^\infty(G^*)$. 证明轨道积分

$$O(\widetilde{g}, \widetilde{f}) = \int_{G^*_{\widetilde{g}} \backslash G^*} \widetilde{f}(x^{-1}\widetilde{g}x) \mathrm{d}x$$

收敛. 这里 $G^*_{\widetilde{g}}$ 是 $\widetilde{g}$ 的中心化子.

5. 设 $\widetilde{f} \in C_c^\infty(G^*)$. 证明如果 $\widetilde{g} = \kappa_\theta \in T$, $\widetilde{g} \neq \pm 1$, 那么

$$SO(\widetilde{g}, \widetilde{f}) = O(\kappa_\theta, \widetilde{f}) + O(\kappa_{-\theta}, \widetilde{f})$$

只取决于 $\widetilde{g}$ 的稳定共轭类. 这个 $SO(\widetilde{g}, \widetilde{f})$ 称为稳定轨道积分.

6. 设 $f \in C_c^\infty(G)$. 证明存在 $\widetilde{f} \in C_c^\infty(G^*)$, 使得如果 $g \in G$, $\widetilde{g} \in G^*$, $g \rightsquigarrow \widetilde{g}$, 那么 $SO(\widetilde{g}, \widetilde{f}) = -O(g, f)$; 如果 $\widetilde{g}$ 有两个不同的实特征值, 那么 $O(\widetilde{g}, f) = 0$.

7. 证明 $T \backslash \{\pm 1\}$ 上的函数

$$\widetilde{g} \mapsto O(\widetilde{g}, \widetilde{f})$$

是光滑函数. 证明

$$\kappa_\theta \mapsto (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \left( O(\kappa_\theta, \widetilde{f}) - O(\kappa_{-\theta}, \widetilde{f}) \right)$$

是 $T$ 上的光滑函数. 这里右边两个轨道积分的差称为 $\kappa$-轨道积分, 前面这个 $e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ 称为传递因子.

我们现在倒回来看看群镜理论说了什么. 上面谈的群镜理论都是指的这个理论的几何部分, 谱部分需要更进一步的表示论知识. 几何部分大概是说, 不同群上的轨道积分是有深刻联系的. 具体地说, 我们有下面的结论.

1. 群 $G$ 和 $G^*$ 互为内形式 (大概是说这两个李群的复化是一样的, 再加上更进一步的一些条件, 我们先不管这个定义). 群 $G$ 上的轨道积分可以用 $G^*$ 上的稳定轨道积分表达出来.

2. 群 $T$ 称为 $G^*$ 的镜群, 群 $G^*$ 上的 $\kappa$ 轨道积分可以用 $T$ 上的轨道积分表达出来. 注意这里 $T$ 是交换的, 所以轨道积分就是函数自己.

对于一般的半单 (或者既约) 李群, 我们都可以定义内形式和镜群的概念. 这些群上同样有上面类似的轨道积分的现象. 这种现象称为轨道积分的传递性. 一般情况下轨道积分的传递性已经由 Shelstad 证明.

对于其他的局部紧群, 特别的在 Langlands 纲领中特别重要的 $p$-adic 群, 也可以平行建立上面的群镜理论. 轨道积分的传递性是过去三十年最最重要的论题之一. 经过无数伟大的数学家前仆后继的努力, 终于在零八年左右完全搞定, 特别要提到的名字包括 Arthur, Ngo, Waldspurger. 这些当然挂一漏万. 群镜理论是一座丰富的宝藏, 值得大家都去挖一挖.