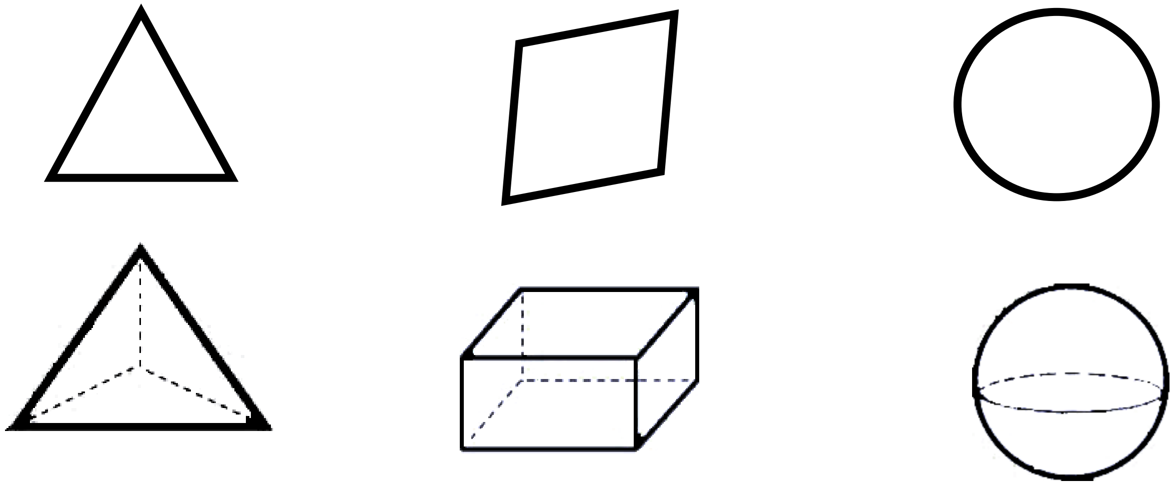
形，从熟悉到陌生

报告人：孙笑涛

中国科学院数学与系统科学研究院

熟悉的“形”

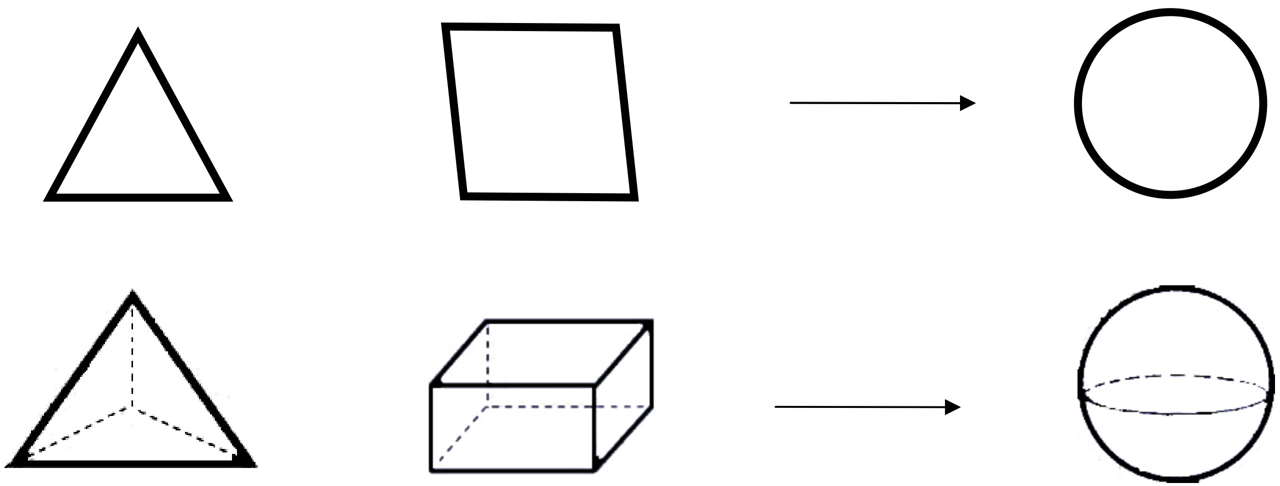


顶点数=棱数

面数--棱数+顶点数=2 （欧拉公式）

拓扑学的观点

M 三角剖分 ---------- 同调群 $H^i(M)$



M

M

上述的公式可表述为：

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \dim H^i(M).$$

但这些图形“明显”不同！

$\rightsquigarrow$ 微分几何：度量，曲率……

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \text{高斯曲率} = \chi(M)$$

(无边紧曲面的Gauss-Bonnet)

（陈省身对高维情形的证明是划时代的）

代数几何的观点

$$X(\mathbb{R}) = \bigcirc \longrightarrow X : x^2 + y^2 = 1$$

<u>非紧</u>的**1-**维复流形 $\leftsquigarrow$ $X(\mathbb{C})$

紧化 $X(\mathbb{C})$：$X : x^2 + y^2 = z^2$ （齐次方程）

$$P^2 = \mathbb{C}^3 - \{0\} / \sim \ : \quad (a_0, a_1, a_2) \sim (b_0, b_1, b_2) \Leftrightarrow \exists \ \lambda \neq 0, \ a_i = \lambda b_i$$

紧化后的“形”

$$X(\mathbb{C})=\left\{[a_0,a_1,a_2]\in P_0^2 \mid a_0^2+a_1^2=a_2^2\right\}$$

$\uparrow$

紧的**1**—维复流形

记号：对任意子集 $\mathbf{K}\subset\mathbb{C}$

$$X(K)=\left\{[a_0,a_1,a_2] \in X(\mathbb{C}) \mid a_i\in K\right\}$$

例如：

$$X(\mathbb{Q}) = X(\mathbb{Z})$$

$$X : x^n + y^n = z^n$$

$$\Rightarrow X(\mathbb{Q}) \subset \{xyz = 0\}$$ （费马大定理）

“数” $\rightsquigarrow$ “解” 方程 **X** $\rightsquigarrow$ “形” $X(\mathbb{C})$

$\swarrow$

“数”

代数几何：对 $X(\mathbb{C})$ 的分类

另一个观点

$$X(\mathbb{R}) \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \text{代数同态 } \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \longrightarrow \mathbb{R} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{ \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \text{部分极大理想} \right\}$$

Grothendieck *认为应考虑*

$$\left\{ \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \text{的素理想} \right\} \text{ —— 概形}$$

提纲

- 一般介绍
- 齐次三元三次方程
- 齐次四元三次方程
- 从“形”到“数”

一般介绍

$$X: \begin{cases} f_1(x_0,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots \\ f_m(x_0,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$ （齐 次 多 项 式）

$$P^n=\{q=[q_0,\cdots q_n] \mid q_i \in \mathbb{C} \text{ 不全为零}\}$$

$$q=q' \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{C}^*,\ q_i^{'}=\lambda q_i$$

$$X(\mathbb{C})=\left\{q\in P^n \,\middle|\, f_1(q)=\cdots=f_m(q)=0\right\}$$

$\longrightarrow$ $X(\mathbb{C})$ 是一个 “紧复流形”

问题：什么样的“紧复流形”是多项式的“零点集”（即 $M\cong X(\mathbb{C})$）？

这样的 **M** 称为“代数的”

周炜良引理：M是代数的 $\Leftrightarrow$ 存在

$$\phi : M \hookrightarrow P^n$$

$$\forall\ U \subset M,\ \phi : U \to P^n$$

$$\phi(q) = [s_0^U(q), s_1^U(q), \cdots, s_n^U(q)]$$

$$s_i^U : U \to \mathbb{C}$$ （全纯函数）

$$\forall \quad V \subset M,\ \phi(q) = [s_0^{V}(q), s_1^{V}(q), \cdots, s_n^{V}(q)]$$

$$\forall \quad q \in U \bigcap V,$$

$$[s_0^{U}(q), \cdots, s_n^{U}(q)] = [s_0^{V}(q), \cdots, s_n^{V}(q)]$$

$$\Rightarrow \exists \quad \lambda^{UV}(q) \in \mathbb{C}^{*}, \quad \text{使得}$$

$$s_i^{U}(q) = \lambda^{UV}(q) \cdot s_i^{V}(q)$$

$$\left\{\lambda^{UV}: U \cap V \to \mathbb{C}^*\right\} \in H^1(M, O_M^*)$$

定义了 M 上的一个线丛 $L \to M$

使得 $\left\{s_i^U : U \to \mathbb{C}\right\}_U$ 定义了其“整体断面”

$$s_i : M \to L \quad (0 \le i \le n)$$

定理：M 是代数的 $\Leftrightarrow$ 存在一个线丛 L 使得

$$c_1(L) > 0$$

齐次三元三次方程

$$X : f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i_0+i_1+i_2=3} a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = 0$$

$$X(\mathbb{C}) = \left\{ q \in P^2 \middle| f(q) = 0 \right\} \subset P^2$$

是一个1-维紧复流形。

固定 $O \in X(\mathbb{C})$, $X(\mathbb{C})$ 有群“结构”

$$\forall \ P,\ Q \in X(\mathbb{C}), \qquad R = \overline{PQ} \cap X(\mathbb{C})$$

$$P + Q = \overline{OR} \cap X(\mathbb{C})$$

$\Rightarrow$ “ $X(\mathbb{C})$ 是**1-**维紧复**Lie**群”

$$X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/\Lambda$$

$$\Lambda = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2, \qquad z \mapsto z+v,\ \ v \in \Lambda$$

超越函数“解”三次方程

Weierstrass函数

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$\mathbb{C} / \Lambda \quad \rightarrow \quad X$$

$$z \quad \mapsto \quad [\wp(z), \ \wp'(z), \ 1]$$

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - a_2 \wp(z) - a_3$$

事实上，有“群结构”的紧复流形都同构于

$$M = \mathbb{C}^g / \Lambda \qquad \Lambda \subset \mathbb{C}^g \quad \text{是一个“格”}$$

定理：当 $g \geq 2$ ，对 “几乎所有” 的格 Λ ，

$\mathbb{C}^g / \Lambda$ 都 不是 “ 代数的 ”

定理： $\mathbb{C}^g / \Lambda$ 是 “代数的” $\Leftrightarrow$ 存在正定的

Hermitian形式 $H:\ \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ 满足

$$\operatorname{Im} H(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$$

问题：寻找多项式 $f_1,\cdots,f_m$，使

$$X(\mathbb{C})=\left\{q\in P^n \;\middle|\; f_1(q)=\cdots=f_m(q)=0\right\}$$

有“群结构”。

$\rightsquigarrow$ 这样 $X(\mathbb{C})$ 称为“**Abel**簇”。

D. Mumford:

On the equations defining abelian Varieties (Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ).

(Ⅰ) Invent. math. 1, 287-354 (1966)
(Ⅱ) Invent. math. 3, 75-135 (1967)
(Ⅲ) Invent. math. 3, 215-244 (1967)

齐次四元三次方程

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=3} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}=0$$

$$X=X(\mathbb{C})=\left\{q\in P^3 \,\middle|\, f(q)=0\right\}\subset P^3$$

一个**2-**维紧复流形（三次曲面）

超平面和直线

$$\ell : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

定义 P^3 中的一个超平面 H 。

两个线性无关的线性方程

$$\begin{cases} \ell_1 = 0 \\ \ell_2 = 0 \end{cases}$$

定义了 P^3 中的一条直线。

X包含27条直线

如果 $L_1+L_2+L_3 = X\cap H$ 则称该三条直线组成 X 上的一个 “三角形”。

- X 上任意两条相交直线确定一个 “三角形”
- 如果 $L \subset X$ 是一条直线，$L\subset H_\lambda$

$$X\cap H_\lambda = L\cup C_\lambda$$

$\Rightarrow$ 正好有5个<u>不相交</u>的“奇异”二次曲线 $C_\lambda = L_\lambda \cup L'_\lambda$ 。

固定两条不相交直线 **L，M，** $\forall\ P \in X$

$[P, L] =$ 通 过 P 和 L 的 平 面

$$\phi_1(P)=[P, L]\cap M \quad \in M$$

$$\phi_2(P)=[P, M]\cap L \quad \in L$$

$$\phi: X \setminus (L \cup M) \to M \times L \cong P^1 \times P^1$$

$$P \mapsto \phi_1(P) \times \phi_2(P)$$

$$\phi: X \to P^1 \times P^1$$

$$L = \{\ell_1(q) = \ell_2(q) = 0\} \subset X$$

$$M = \{M_1(q) = M_2(q) = 0\} \subset X$$

$$\phi: \ X \setminus (L \cup M) \longrightarrow P^1 \times P^1$$

$$\phi(P) = [\ell_1(P), \ell_2(P)] \times [M_1(P), M_2(P)]$$

如果 $P \in L$ ，令 $f = \ell_1 f_1 + \ell_2 f_2$

$$\phi(P) = [f_2(P), -f_1(P)] \times [M_1(P), M_2(P)]$$

如果 $L_1+L_2+L_3$ 是一个“三角形”，**L**是第**4**条直线。则**L** 刚好与 $L_1+L_2+L_3$ 中的一条相交。

$$L: \xrightarrow{\cap H_\lambda} (L, L_i, L_i') \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

$$\Big\downarrow \ M \text{ 仅相交一直线}$$

$$(M, L_i, L_i'') \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

$$(L_i \cup L_i'') \cap (L_j \cup L_j'') = \phi \qquad (i \neq j)$$

$$\forall \quad P \in L_i, \qquad [P, L] \cap X = L \cup L_i \cup L_i'$$

$$\phi_1(L_i) = M \cap L_i, \qquad \phi_2(L_i) = L \cap L_i$$

$\Rightarrow \quad \phi$ 将**5**条直线 $L_1, \cdots, L_5$ 映成**5**个点

$$\phi^{-1}: M \times L \setminus \{\phi(L_1), \cdots \phi(L_5)\} \to X$$

$$(Q_1, Q_2) \mapsto \overline{Q_1 Q_2} \cap X$$

$\longrightarrow \quad \phi$ 称为“双有理”

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Phi"'] & P^1 \times P^1 \arrow[d, "\text{Segre 浸入}"] \\ & P^3 \end{tikzcd}$$

$$S = \Phi(X) = \left\{ [z_0, z_1, z_2, z_3] \middle| z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0 \right\}$$

固定 $P_0 \in S$

$$f: \quad S \dashrightarrow \left\{ P^3\text{中通过}P_0\text{的直线} \right\} \cong P^2$$

$$P \mapsto \overline{PP_0}$$

有理代数簇

$$\Rightarrow \quad \Phi^{-1} \cdot f^{-1}: \quad P^2 \dashrightarrow X$$

是“双有理”的

这样的X称为有理代数簇。

$$\Rightarrow \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$$

有 “有理函数” 解：

$$x_i = \varphi_i(x,y)$$

问题：

P^4中由三次方程定义的X_3是否为有理代数簇？

即是否存在双有理映射

$$P^3 \dashrightarrow X_3 \quad ?$$

定理（**Clemens-Griffiths**）

$X_3 \subset P^4$不是有理代数簇。

“The intermediate Jacobian of the cubic three fold”

Ann. Math. 95 (1972), 281-356.

代数簇X称为“同纹”

如果存在有理映射

$$P^1 \times Y \dashrightarrow X$$

X “同纹” $\Rightarrow$ X上不存在张量微分形式 $\Leftrightarrow \kappa(X) = -1$

猜想： X是“同纹”的 $\Leftrightarrow$ $\kappa(X) = -1$

当 $\dim(X) \leq 3$ 时，该猜想是正确的。

从几何到数论

“数” $\longrightarrow$ $X(Q)=X(\mathbb{Z})$

① 是否非空？

② 是否有限？

③ 是否在 $X(\mathbb{C})$ 中稠密？

更一般地，对有限扩域 $K\supset Q$ ，

可以问同样的问题。

从“形”到“数”可以表述为：

X($\mathbb{C}$) 满足“……” $\Rightarrow$ X(K) 满足“……”。

例如：当 X($\mathbb{C}$) 是一维紧复流形时

亏格0 $\Rightarrow$ 存在 $K \supset Q$，X(K)在 X($\mathbb{C}$) 中 稠密，

亏格1 $\Rightarrow$ 存在 $K \supset Q$，X(K) 无限， 但是有限生成群，

亏格>1 $\Rightarrow$ 对任意 $K \supset Q$，X(K) 有限 （Mordell猜想）

$X(\mathbb{C})$是三次曲面 $\Rightarrow$ 存在 $K \supset Q$ ，使 $X(K)$ 稠密。

猜想： 如果$X(\mathbb{C})$ 是一般型代数簇，则对任意 $K \supset \mathbb{Q}$，$X(K)$ 不是稠密的。

例如： $$X(\mathbb{C}) = \left\{ \underline{q} \in P^3 \,\middle|\, f(\underline{q}) = 0 \right\}.$$

当**f**的次数**>4**时，$X(K)$ 包含在一条曲线中。

从“简单”到“复杂”—— Mordell猜想的证明

$$X(\mathbb{Q})=X(\mathbb{Z}) \qquad \left(X(K)=X(O_K) \right)$$

$$x=[x_0,\cdots x_n]\in X(\mathbb{Z})$$

(高度): $h(x)=\max\left\{|x_0|,\cdots|x_n|\right\}$

高度有界 $\Rightarrow$ $X(\mathbb{Q})$ 有限。

$X(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{Parshin}}$ {几何对象}。

$$X: \quad f = x_0^3 + 2x_1^3 + 5x_2^3 = 0$$

$$X_2: \quad \bar{f} = x_0^3 - x_2^3 = 0$$

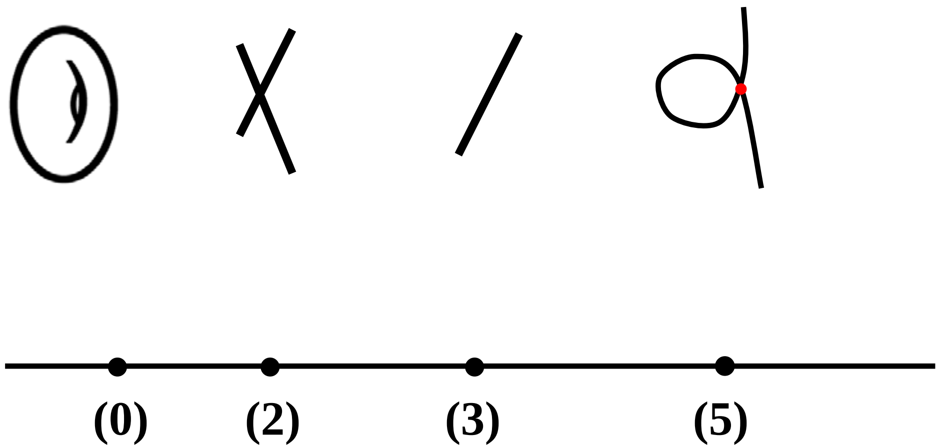
$$X_5: \quad \bar{f} = x_0^3 + 2x_1^3 = 0$$

$$X_3: \quad \bar{f} = x_0^3 - x_1^3 - x_2^3 = (x_0 - x_1 - x_2)^3 = 0$$

X

$\downarrow$

Space($\mathbb{Z}$):



$\Rightarrow$ X 在 S=$\{2,3,5\}$ 之外有“好约化”。

$$X(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{Parshin}} \left\{\begin{array}{l} \text{C/K 在 S 之外有} \\ \text{“好约化”，} g \geq 2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A/K \text{ 在S之外} \\ \text{有“好的约化”} \end{array}\right\} \longleftarrow$$

存在多项式方程（代数簇）

$$M_g: \begin{cases} f_1 = 0 \\ \cdots \\ f_m = 0 \end{cases}$$ 系数在**K**中

使得 $M_g(K) = \{C/K \text{ 具有亏格 } g \geq 2\}.$

$\rightsquigarrow$ “亏格 g 代数曲线的模空间 M_g ”

$M_g(K) \hookrightarrow A_g(K) = \{$ g- 维 **Abel**簇 /K $\}$

定理（Faltings）

对给定的**S**和 $g \geq 1$，仅有有限个定义于**K**上的 g **-**维**Abel** 簇在**S**之外有**“**好约化**”**。

$$x \in A_g(K) \rightsquigarrow A/K \rightsquigarrow A/O_K$$

$$h(x) \approx \frac{\deg(\omega_A/O_K)}{[K:\mathbb{Q}]} := h(A)$$

存在常数**c,**对任意 $A_1 \sim A_2$，

$$|h(A_1) - h(A_2)| < c$$

$$A_1 \sim A_2 \iff T_\ell(A_1) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong T_\ell(A_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

（作为**Galois** 表示）

Parshin 构造

存在 $K \supset \mathbb{Q}$ (在 S 外非分岐) 使得 $\forall P \in X(\mathbb{Q})$，存在

$$f_P : C_P \to X$$

（1）f_P 仅在 P点 “分岐”

（2）C_P 在 S 外有 “好约化”

（3）$\deg(f_P) \le B(g)$

代数函数"解"三次方程

定理（A. Wiles): 设椭圆曲线**X**的导子为**N**

则有 代数同态

模空间 $$X_0(N) \to X$$

$$X_0(N)(K) = \{(E, G) \mid G \subset E(K)\}$$

谢谢大家！