双哈密顿上同调与可积系统

张友金

清华大学

中科院数学所, 2015 年 5 月 6 日

1. 可积系统理论的一些重要结果

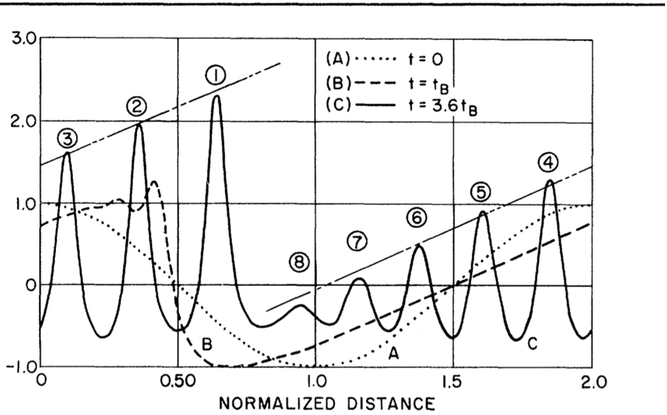
19 世纪孤立波现象的发现及其描述

- John Scott Russell:
  发现 “Wave of Translation”, 1834, Union Canal.
- Joseph Boussinesq, Lord Rayleigh(发现氩元素):
  分别于 1871 年和 1876 发表论文从理论上解释孤立波现象.
- Diederik Korteweg, Gustav de Vries:
  于 1895 年发表论文进一步给出了描述孤立波的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

20 世纪 60 年代中期开始对非线性可积方程的系统研究

- Zabusky, Kruskal:
  1965 年借助于计算机数值计算发现 KdV 方程解的"孤立子"现象. (下图见 Phys. Rev. Lett 15 (1965), 240-243).



- Gardner, Greene, Kruskal, Miura:

  1967 年提出求解 KdV 方程的一类初值问题的反散射方法. 这类初值问题要求初值函数充分光滑并且当其自变量趋于无穷时充分快地趋于零.

- Lax, Zakharov, Shabat

  等的工作使得人们认识到 KdV 方程的可积性是被其它许多非线性偏微分方程所共有的. 而这些非线性偏微分方程的可积性质的一个表现是它们具有 Lax 对表示.

20 世纪 70 年代可积系统 (孤立子) 理论的发展

- Faddeev, Zakharov

  1971 年发现 KdV 方程是一个无穷维的可积哈密顿系统. Gardner 也给出了 KdV 方程的哈密顿结构.

- Ryogo Hirota

  1973 年开始发展了求解孤立子方程特解的双线性方法.

- Novikov, Dubrovin, Krichever, Its, Matveev, Flaschka,

  等 1974 年开始发展了求解孤立子方程周期初值问题的代数几何方法.

- Franco Magri

  1978 年发现 KdV 方程具有第二个无穷维的哈密顿结构, 由此给出了 KdV 方程的一个双哈密顿结构. 双哈密顿结构是非线性偏微分方程可积性的另一个重要表现, 也是可积系统与几何学联系的一个重要纽带.

20 世纪 80 年代可积系统 (孤立子) 理论的发展

- Drinfeld, Sokolov

  从任意仿射李代数出发构造非线性可积方程簇. 对于非扭的仿射李代数, 他们利用辛约化的无穷维对应给出了相关的可积方程簇的双哈密尔顿结构.

- Sato, Date, Jimbo, Miwa, Kashiwara

  等为代表的京都学派, 利用非扭仿射李代数的基本表示的 boson-fermion 实现, 给出了其最高权向量在相应的李群作用下的轨道与某一可积方程簇的 Hirota 双线性方程的解空间之间的联系, 揭示了可积方程丰富的对称性, 由此也给出了从仿射李代数出发构造非线性可积方程簇的一个方法.

- Kac, Wakimoto

  利用仿射李代数的基本表示的正则顶点算子实现进一步推广了 Date, Jimbo, Miwa, Kashiwara 构造可积方程簇的方法.

20 世纪 90 年代可积系统与量子场论

- Brezin, Kazakov, Douglas, Shenker, Gross, Migdal
  等揭示了 2 维引力的矩阵模型量子化与 KdV 方程簇之间的深刻联系.
- Witten, Kontsevich
  Witten 提出了利用稳定曲线模空间上的相交数给出的 2 维引力的量子化, 并且猜测这一 2 维引力的拓扑量子化模型和矩阵模型是等价的. 这一猜随后由 Kontsevich 证明.
- Witten, Dubrovin
  Gromov-Witten 理论及 2 维拓扑场论的零亏格近似以及 Frobenius 流形与流体力学型双哈密顿可积方程簇的联系.
- Dubrovin, Z.
  在半单性条件下 2 维拓扑场论的亏格 1 近似与流体力学型双哈密顿可积方程簇的形变的联系.

近 10 多年来可积系统研究方面的某些进展

- Dubrovin, Z.; Getzler

  半单 Frobenius 流形上流体力学型双哈密顿可积方程簇的拓扑形变的构造, $\mathbb{CP}^1$ 的 Gromov-Witten 不变量与拓展 Toda 方程簇的联系.

- Alexander Givental

  半单 Frobenius 流形的 total descendant potential 的量子化公式. ADE 型奇点对应的 Frobenius 流形与 ADE-型仿射李代数对应的 Kac - Wakimoto 方程簇的联系.

- Fan, Jarvis, Ruan

  ADE 型奇点对应的 FJRW 量子奇点理论与 ADE-型仿射李代数对应的 Drinfeld-Sokolov 方程簇之间的联系.

- Dubrovin, Liu, Z., Carlet, Posthuma, Shadrin

  半单流体力学型双哈密顿结构形变的分类.

2. KdV 方程簇及其双哈密顿结构

KdV 方程是用于描述浅水中的孤立波现象的关于函数 $u = u(x,t)$ 的如下非线性发展方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

它是线性方程的相容性条件

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = A\psi.$$

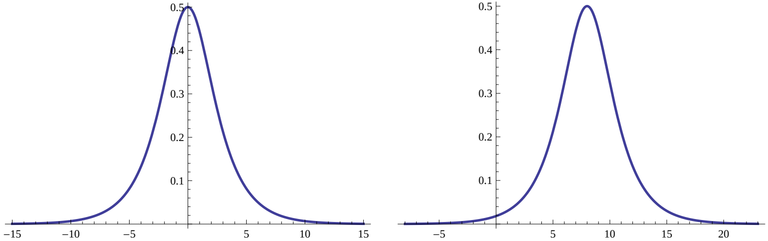
其中 $L = \partial_x^2 + u$, $A = 4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x$. 等价的, KdV 方程有 Lax 对表示

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L].$$

如用一个 $2n+1$ 阶的微分算子 $A_n = a_0\partial^{2n+1} + \cdots + a_{2n+1}$ 来代替 A, 我们可以得到高阶 KdV 方程, 它们构成 KdV 方程簇.

KdV 方程的孤立波解

$$u(x,t) = \frac{k^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{k}{2}x - \frac{k^3}{2}t\right)$$



(a) with $k = 1, t = 0$ (b) with $k = 1, t = 8$

Figure : A soliton solution of KdV

KdV 方程的双孤立粒子解

$$u(x,t) = 2\partial_x^2 \log \tau.$$

其中

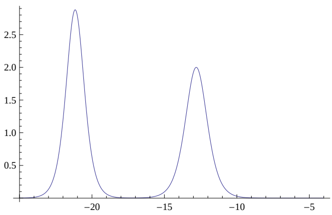
$$\tau = \det \begin{pmatrix} -k_1(c_1 e^{\phi_1} - e^{-\phi_1}) & c_1 e^{\phi_1} + e^{-\phi_1} \\ -k_2(c_2 e^{\phi_2} - e^{-\phi_2}) & c_2 e^{\phi_2} + e^{-\phi_2} \end{pmatrix}$$

以及

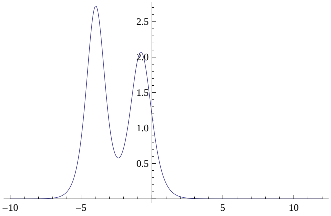
$$\phi_i = k_i x - 4k_i^3 t.$$

在下面的图示中我们取

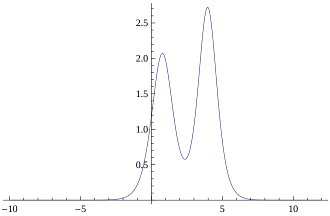
$$k_1 = 1, k_2 = 1.2, c_1 = 1, c_2 = -1.$$



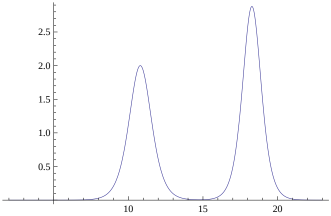
(a) with $t = -3.5$



(b) with , $t = -0.5$



(c) with $t = 0.5$



(d) with , $t = 3$

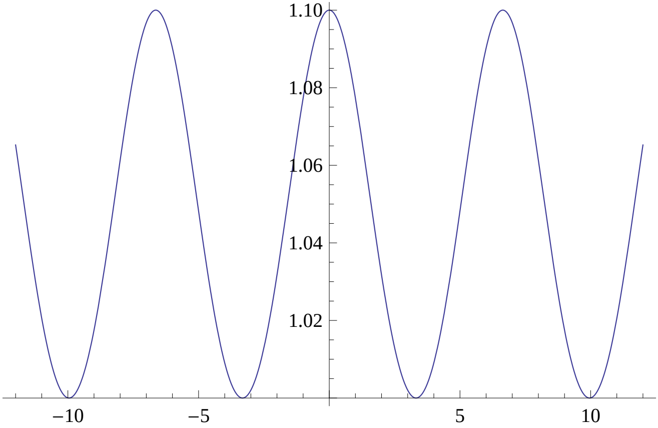
KdV 方程的周期解 – 代数几何方法

Korteweg 和 de Vries 给出了 KdV 方程的称为椭圆余弦波 (cnoidal waves) 的周期解

$$u(x,t) = b + 2mk^2 \, cn^2(k(x-ct)|m), \quad c = 6b + 4(2m-1)k^2$$

其中 $cn(x|m)$ 是模为 $\sqrt{m}(0 < m < 1)$ 的 Jacobi 椭圆函数, 当 $m \to 1$ 时我们得到孤立波解.

更一般的周期解可以将 KdV 方程限制到由高阶 KdV 方程的驻定解定义的不变子流形上得到. 这样的驻定流是有限维可积哈密顿系统. 在它的谱曲线的 Jacobi 簇上 KdV 方程成为线性方程. 由此得到的 KdV 方程的拟周期解, 可以由 Riemann theta 函数表示.


1.10
1.08
1.06
1.04
1.02
−10
−5
5
10

引入色散参数的 KdV 方程簇

通过适当的尺度变换并通过 $x \to \epsilon x, t \to \epsilon t$ 引入色散参数后 KdV 方程簇有形式

$$
\begin{aligned}
u_{t_0} &= u_x, \\
u_{t_1} &= u u_x + \frac{\epsilon^2}{12} u_{xxx}, \\
u_{t_2} &= \frac{1}{2} u^2 u_x + \frac{\epsilon^2}{12}(2 u_x u_{xx} + u u_{xxx}) + \frac{\epsilon^4}{240} u^{(5)}, \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

这里我们重新记 KdV 方程的时间变量为 t_1, $u^{(5)} = \partial_x^5 u$. 这些流之间两两可交换, 所以我们可以谈论 KdV 方程簇的解

$$u = u(x, t_1, t_2, \ldots), \quad \text{其中 } t_0 = x.$$

Witten 猜想给出的 KdV 方程簇的拓扑解

KdV 方程簇的拓扑解可以表示为

$$u = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \log \tau(t_0, t_1, \ldots)}{\partial x^2} = \sum_{g \geq 0} \epsilon^{2g} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_g(t_0, t_1, \ldots)}{\partial x^2}.$$

其中 $\tau = e^{\sum_{g\geq 0} \epsilon^{2g-2} \mathcal{F}_g}$ 是 2 维拓扑引力的配分函数，而

$$\mathcal{F}_g = \sum \frac{1}{k!} t_{p_1} \cdots t_{p_k} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,k}} \psi_1^{p_1} \wedge \cdots \wedge \psi_k^{p_k}.$$

这里 $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ 是具有 k 个有序标定点的亏格为 g 的稳定代数曲线模空间的 Deligne-Mumford 紧化，ψ_k 是第 k 个标定点对应的 $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ 上的余切线丛的第一陈类.

我们给出 $\log\tau$ 的前面一些项

$$\log\tau = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{t_0^3}{6}+\frac{t_0^3\,t_1}{6}+\frac{t_0^3\,t_1^2}{6}+\frac{t_0^3\,t_1^3}{6}+\frac{t_0^3\,t_1^4}{6}+\frac{t_0^4\,t_2}{24}+\frac{t_0^4\,t_1\,t_2}{8}\right.$$

$$\left.+\frac{t_0^4\,t_1^2\,t_2}{4}+\frac{t_0^5\,t_2^2}{40}+\frac{t_0^5\,t_3}{120}+\frac{t_0^5\,t_1\,t_3}{30}+\frac{t_0^6\,t_4}{720}+\dots\right)$$

$$+\left(\frac{t_1}{24}+\frac{t_1^2}{48}+\frac{t_1^3}{72}+\frac{t_1^4}{96}+\frac{t_0\,t_2}{24}+\frac{t_0\,t_1\,t_2}{12}+\frac{t_0\,t_1^2\,t_2}{8}+\frac{t_0^2\,t_2^2}{24}\right.$$

$$\left.+\frac{t_0^2\,t_3}{48}+\frac{t_0^2\,t_1\,t_3}{16}+\frac{t_0^3\,t_4}{144}+\dots\right)+O(\epsilon^2).$$

KdV 方程是可积哈密顿系统 (Gardner 1971, Faddeev & Zakharov 1971)

$$u_{t_1} = \{u(x), H_1\} = P_1 \frac{\delta H_1}{\delta u}$$

其中哈密顿算子和哈密顿量为

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad H_1 = \int (-u(x)^3 + \frac{1}{2} u_x^2) dx.$$

哈密顿算子 P_1 定义了局部泛函空间上的一个 Poisson 括号

$$\{H, G\}_1 = \int \frac{\delta H}{\delta u(x)} P_1 \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx.$$

它满足反称性条件和 Jacobi 恒等式. 此哈密顿系统有无穷多两两对合的守恒律, 其作用 - 角变量可以由 Schrödinger 算子的散射数据表示.

KdV 方程的第二个哈密顿结构 (F. Magri 1978)

$$u_{t_1} = \frac{2}{3}\{u(x), H_0\}_2 = \frac{2}{3}P_2\frac{\delta H_0}{\delta u}.$$

其中哈密顿算子有形式

$$P_2 = u(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}u_x + \frac{\epsilon^2}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

双哈密顿递推关系

$$\{u(x), H_{p-1}\}_2 = (p+\frac{1}{2})\{u(x), H_p\}_1, \quad H_{-1} = \int u(x)dx, \quad p \geq 0$$

给出了 KdV 方程簇

$$\frac{\partial u}{\partial t_p} = \{u(x), H_p\}_1, \quad p \geq 0.$$

KdV 方程簇的双哈密顿结构

我们通常将 KdV 方程簇对应的两个 Poisson 括号表示为

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \delta'(x-y),$$
$$\{u(x), u(y)\}_2 = u(x)\delta'(x-y) + \frac{1}{2}u_x\delta(x-y) + \frac{\epsilon^2}{8}\delta'''(x-y).$$

它是如下的所谓流体力学型双哈密顿结构的形变

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \delta'(x-y),$$
$$\{u(x), u(y)\}_2 = u(x)\delta'(x-y) + \frac{1}{2}u_x\delta(x-y).$$

2 维拓扑场论中出现的 KdV 型的可积方程簇

未知函数为特殊的 2-点函数

$$u^{\alpha}(x,t)=\eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial^2\mathcal{F}(t)}{\partial t^{1,0}\partial t^{\gamma,0}},\quad \alpha=1,\dots,n.$$

这里 $\mathcal{F}(t)$ 为自由能，它有亏格展开

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)+\epsilon^2\mathcal{F}_1(t)+\dots.$$

$t=(t^{\alpha,p}),\alpha=1,\dots,n,\ p\geq 0$ 为 primary fields 及其引力派生场的耦合常数，ϵ 为弦耦合常数. 将单位场的耦合常数 $x=t^{1,0}$ 看成空间变量，其它的耦合常数 $t^{\alpha,p}$ 看成时间变量，则 $u(x,t)$ 满足非线性发展方程簇 $(\alpha,\beta=1,\dots,n,q\geq 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t^{\beta,q}}&=K^{\alpha}_{\gamma,\beta,q}(u)u^{\gamma}_x\\&\quad+\epsilon^2(A^{\alpha}_{\gamma,\beta,q}(u)u^{\gamma}_{xxx}+B^{\alpha}_{\gamma,\xi,\beta,q}(u)u^{\gamma}_{xx}u^{\xi}_x+C^{\alpha}_{\gamma,\xi,\zeta,\beta,q}(u)u^{\gamma}_xu^{\xi}_xu^{\zeta}_x)+\mathcal{O}(\epsilon^4).\end{aligned}$$

Witten-Kontsevich 定理的推广

- $\mathbb{CP}^1$ 拓扑 sigma 模型的配分函数由拓展的 Toda 方程簇的某个特解给出.
- 由 FJRW 量子奇点理论给出的 *ADE* 型奇点的 Landau - Ginzburg A-模型由 *ADE* 型非扭仿射李代数对应的 Drinfeld-Sokolov 方程簇所控制.

一般地, 在零亏格近似 $(\epsilon \to 0)$ 下, $u^\alpha(x,t)$ 满足一流体力学型双哈密顿可积方程簇, 全亏格下的方程簇可以看成是它的一个形变.

问题: 如何刻画这类形变的可积方程簇及其双哈密顿结构?

我们的做法是通过研究流体力学型双哈密顿结构的形变的分类来回答上述问题.

3. 流体力学型双哈密顿结构的形变

我们考虑如下形式的具有流体力学型极限的双哈密顿结构

$$\{u^i(x), u^j(y)\}_a = g_a^{ij}(u(x))\delta'(x-y) + \Gamma_{k;a}^{ij}(u(x))\, u_x^k\, \delta(x-y)$$

$$+ \sum_{m\geq 1}\sum_{l=0}^{m+1} \epsilon^m A_{m,l;a}^{ij}(u, u_x, \ldots, u^{(m+1-l)})\delta^{(l)}(x-y),$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad a = 1, 2$$

在 Miura 型变换

$$u^i \mapsto u^i + \sum_{k\geq 1} \epsilon^k F_k^i(u; u_x, \ldots, u^{(k)}), \quad i = 1, \ldots, n$$

下的分类问题. 其中 $A_{m,l;a}^{ij}, F_k^i$ 关于 $u_x^i, u_{xx}^i, \ldots$ 的满足一定齐次性条件的多项式, 其系数光滑依赖于 $u^1, \ldots, u^n$.

关于这一分类问题的第一个重要结果由 P. Lorenzoni (2002) 给出. 他研究了 KdV 方程簇对应的双哈密顿结构的无色散极限

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \delta'(x-y),$$
$$\{u(x), u(y)\}_2 = u(x)\delta'(x-y) + \frac{1}{2}u(x)'\delta(x-y),$$

的形变在 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ 下的近似. 他证明了这一流体力学型双哈密顿结构的形变的等价类以单变量的光滑函数 $s(u)$ 作为参数.

特别地，当 $s(u)=\frac{1}{24}$ 时，相应的形变

$$\{u(x),u(y)\}_1=\delta'(x-y),$$

$$\{u(x),u(y)\}_2=u(x)\delta'(x-y)+\frac{1}{2}u(x)'\delta(x-y)+\frac{\epsilon^2}{8}\delta'''(x-y),$$

就是 KdV 方程

$$u_t=uu_x+\frac{\epsilon^2}{12}u_{xxx}$$

及 KdV 方程簇的双哈密顿结构.

当 $s(u)=\frac{u}{24}$ 时我们有双哈密顿结构

$$\{u(x),u(y)\}_1=\delta'(x-y)-\frac{\epsilon^2}{8}\delta'''(x-y),$$
$$\{u(x),u(y)\}_2=u(x)\delta'(x-y)+\frac{1}{2}u_x\delta(x-y).$$

它给出了另一描述浅水波运动的 Camassa-Holm方程

$$u_t=mm_x-\frac{\epsilon^2}{12}m_xm_{xx}-\frac{\epsilon^2}{24}mm_{xxx}$$
$$u=m-\frac{e^2}{8}m_{xx}$$

及 Camassa-Holm 方程簇的双哈密顿结构. 这一方程簇也是孤立子理论中一个重要的可积方程簇.

Dubrovin, Liu, Z. (2005, 2006) 对具有半单流体力学型极限的双哈密顿结构定义了其中心不变量

定义 (Central invariants))

$$c_i(u) = \frac{1}{3(f^i(u))^2}\left(Q_2^{ii} - u^i Q_1^{ii} + \sum_{k\neq i} \frac{(P_2^{ki} - u^i P_1^{ki})^2}{f^k(u)(u^k - u^i)}\right)$$

$$i = 1, \ldots, n$$

这里我们取适当的坐标系 (称为正则坐标系) 使得两个哈密顿算子具有形式

$$\mathcal{P}_1^{ij} = (\delta_{ij} f^i(u)\partial_x + \ldots) + \epsilon(P_1^{ij}\partial_x^2 + \ldots) + \epsilon^2(Q_1^{ij}\partial_x^3 + \ldots) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$\mathcal{P}_2^{ij} = (\delta_{ij} u^i f^i(u)\partial_x + \ldots) + \epsilon(P_2^{ij}\partial_x^2 + \ldots) + \epsilon^2(Q_2^{ij}\partial_x^3 + \ldots) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

中心不变量有如下性质:

定理 (Dubrovin, Liu, Z., 2006, 唯一性定理)

i) 函数 $c_i(u)$ 只依赖于 u^i, $i = 1, \ldots, n$.

ii) 函数 $c_i(u)$, $i = 1, \cdots, n$ 是双哈密顿结构在 *Miura* 群作用下的不变量.

iii) 两个具有相同半单流体力学型极限的双哈密顿结构是等价的当且仅当它们具有相同的中心不变量.

命题 (Dubrovin, Liu, Z., 2008)

如果一个具有半单流体力学型极限的双哈密顿结构是某一 2-维拓扑场论对应的可积方程簇的双哈密顿结构, 则它的中心不变量

$$c_i = \frac{1}{24}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

定理 (存在性定理)

对任一半单流体力学型双哈密顿结构以及任意给定的一组光滑函数 $c_1(u^1), \ldots, c_n(u^n)$, 存在这一半单流体力学型双哈密顿结构的形变使得 $c_1(u^1), \ldots, c_n(u^n)$ 为其中心不变量.

- Liu, Z. 2013 对单分量情形给出了证明.
- Carlet, Posthuma, Shadrin 2015 对一般情形给出了证明.

为证明上述结论, 我们需要计算流体力学型双哈密顿结构对应的某些上同调群.

Poisson 流形 (Lichnerowicz 1977)

光滑流形 M^n 是一个 Poisson 流形如果给定了双线性映射

$$\{\,,\,\}: \; C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

满足如下的条件:

1. 反称性: $\{f,g\} = -\{g,f\}$.
2. Leibniz rule: $\{f,gh\} = h\{f,g\} + g\{f,h\}$.
3. Jacobi 恒等式: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.

等价地, 在 M 上给定了一个 2-矢量 P (称为Poisson 2-矢量) 满足条件 $[P,P] = 0$, 其中 $[\,,\,]$ 为定义在 M 的多矢量空间

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \; \cdots$$

上的 Schouten-Nijenhuis 括号, 而 $\{f,g\} = P(df,dg)$.

Poisson 上同调 (Lichnerowicz 1977)

设 M 为一 Poisson 流形, 其上的 Poisson 2-矢量 P 定义了一个复形 (Λ^*, d), 其上边缘算子为

$$d\colon\ \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}, \quad a \mapsto [P, a].$$

则 M 上的 Poisson 上同调定义为

$$H^k(M, P) = \frac{\operatorname{Ker} d|_{\Lambda^k}}{\operatorname{Im} d|_{\Lambda^{k-1}}}, \quad k \geq 0.$$

Poisson 上同调的性质

- $H^0(M, P)$: Poisson 括号的 Casimir 构成的空间.
- $H^1(M, P)$: Poisson 结构的无穷小对称构成的空间与其哈密顿向量场构成的空间的商.
- $H^2(M, P)$: Poisson 结构的无穷小形变空间和由坐标变换给出的无穷小形变空间的商.
- $H^3(M, P)$: 刻画了将 Poisson 结构的一个无穷小形变拓展为一个形变的阻碍.

双哈密顿上同调

设 M^n 上给定了一个双哈密顿结构，即

一对相容的 Poisson 结构 (P_1, P_2).

则我们有双复形 (Λ^*, d_1, d_2)，其上边缘算子满足

$$d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0.$$

他们诱导了另一复形 $(\tilde{\Lambda}^* = \mathrm{Ker}\, d_1, d_2)$，其上同调称为双哈密顿上同调

$$BH^k(M, P_1, P_2) = \frac{\mathrm{Ker}\, d_2|_{\tilde{\Lambda}^k}}{\mathrm{Im}\, d_2|_{\tilde{\Lambda}^{k-1}}} = \frac{\mathrm{Ker}\, d_1|_{\Lambda^k} \cap \mathrm{Ker}\, d_2|_{\Lambda^k}}{\mathrm{Im}\, d_2|_{\tilde{\Lambda}^{k-1}}}$$

(Dubrovin & Z. 2001)

Poisson 上同调的性质

i) $BH^0(M, P_1, P_2)$: P_1, P_2 的公共 Casimir 构成的空间.

ii) $BH^1(M, P_1, P_2)$: P_1, P_2 的公共无穷小对称构成的空间与 P_2 的由 P_1 的 Casimir 生成的哈密顿向量场构成的空间的商.

iii) $BH^2(M, P_1, P_2)$: 由 P_2 的保持 (P_1, P_2) 的双哈密顿结构性质的无穷小形变构成的空间与由保持 P_1 不变的由坐标变换诱导的无穷小变换构成的空间的商空间.

而如果 $BH^3(M, P_1, P_2)$ 是平凡的, 则 (P_1, P_2) 的任意无穷小形变可以拓展成 (P_1, P_2) 的一个形变.

多矢量空间

- $\mathcal{A}$: jet-空间 $J^\infty(M^n)$ 上的微分多项式空间.
- $J^\infty(M)$ 上的局部坐标系:

$$u^1, \ldots, u^n, u^{1,1} = u^1_x, \ldots, u^{n,1} = u^n_x, u^{1,2} = u^1_{xx}, \ldots, u^{n,2} = u^2_{xx}, \ldots.$$

- $J^\infty(M)$ 上一个整体定义的向量场:

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} u^{i,s+1} \frac{\partial}{\partial u^{i,s}},$$

其中 $u^{i,0} = u^i$. 这一向量场定义了 $\mathcal{A}$ 上的一个导子, 我们也记之为 ∂_x.

局部泛函空间

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}/\partial_x\mathcal{A},$$

其上元素记为

$$\int f dx, \quad f \in \mathcal{A}.$$

我们记从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}$ 的交错 p-线性映射构成的线性空间为

$$\mathcal{V}^p = \mathrm{Alt}^p(\mathcal{F}, \mathcal{F}),$$

其元素称为广义 p-矢量. 我们引入记号 $\mathcal{V}^0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{V}^{<0} = 0$, 以及

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{V}^p.$$

定理

存在满足如下性质的括号 $[\ ,\ ]: \mathcal{V}^p \times \mathcal{V}^q \to \mathcal{V}^{p+q-1}$:

$$[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P],$$

$$(-1)^{pr}[[P, Q], R] + (-1)^{qp}[[Q, R], P] + (-1)^{rq}[[R, P], Q] = 0,$$

$$[P, F_1](F_2, \cdots, F_p) = P(F_1, \cdots, F_p),$$

对任意 $P \in \mathcal{V}^p$, $Q \in \mathcal{V}^q$, $R \in \mathcal{V}^r$, $F_1, F_2, \cdots, F_p \in \mathcal{F}$ 成立.

上述括号称为广义多矢量之间的 Nijenhuis-Richardson (1966, 67) 括号, 它由如下公式定义:

$$[P, Q] = (-1)^{(p+1)q}\, P\overline{\wedge}Q + (-1)^p\, Q\overline{\wedge}P,$$

其中

$$\begin{aligned} & P\overline{\wedge}Q(F_1, \ldots, F_{p+q-1}) \\ = & \sum_{I\in S_{p,q}} (-1)^{|I|} P(Q(F_{i_1}, \ldots, F_{i_q}), F_{i_{q+1}}, \ldots, F_{i_{p+q-1}}), \end{aligned}$$

而 $S_{p,q}$ 为对称群 S_{p+q-1} 的子集

$$S_{p,q} = \left\{ I = (i_1, \ldots, i_{p+q-1}) \in S_{p+q-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} i_1 < i_2 < \cdots < i_q \\ i_{q+1} < i_{q+2} < \cdots < i_{p+q-1} \end{array} \right\},$$

这里 $|I|$ 表示置换 I 的奇偶性.

定义

设 $P \in \mathcal{V}^p$ 为一广义 p-矢量, 我们称 P 是局部的如果 P 在 $F_1, \cdots, F_p \in \mathcal{F}$ 上的作用具有形式

$$P(F_1, \cdots, F_p) = \int Q^{i_1 \cdots i_p}_{s_1 \cdots s_p} \partial^{s_1} \delta_{i_1}(F_1) \cdots \partial^{s_p} \delta_{i_p}(F_p) dx,$$

where $Q^{i_1 \cdots i_p}_{s_1 \cdots s_p} \in \mathcal{A}, \ \delta_i F = \frac{\delta F}{\delta u^i}$.

定理

由局部多矢量构成的线性空间在 *Nijenhuis-Richardson* 括号下是封闭的.

我们将限制到局部多矢量空间上的 Nijenhuis-Richardson 括号称为是 Nijenhuis-Schouten 括号.

超变量表示

我们引入超变量: $\theta_i^s, \quad i=1,\ldots,n,\ s\geq 0$, 以及

$$\mathcal{S}=\mathcal{A}\otimes\wedge^*(V),\ 其中\, V=\bigoplus_{i,s}(\mathbb{R}\theta_i^s)\,.$$

将 $\mathcal{A}$ 上的导子 ∂_x 延拓到 $\mathcal{S}$

$$\partial_x=\sum_{s\geq 0}\left(u^{i,s+1}\frac{\partial}{\partial u^{i,s}}+\theta_i^{s+1}\frac{\partial}{\partial\theta_i^s}\right):\quad \mathcal{S}\to\mathcal{S}$$

并且定义

$$\mathcal{E}=\mathcal{S}/\partial_x\mathcal{S}.$$

定理

局部多矢量空间同构于 $\mathcal{E}/\mathbb{R}\omega$, 其中 $\omega = u^i_x\theta_i$.

上述同构由如下关系给出

$$\jmath(P)(F_1, \cdots, F_p) = \sum_{s_k \geq 0} \int \partial^{i_p}_{s_p} \cdots \partial^{i_1}_{s_1}(\alpha) \cdot \delta^{s_1}_{i_1}(F_1) \cdots \delta^{s_p}_{i_p}(F_p) dx$$

这里 $\partial^i_s = \frac{\partial}{\partial\theta^s_i}$, $\delta^s_i = \partial^s_x \frac{\delta}{\delta u^i}$, 而 $\alpha \in \mathcal{S}^p$ 是 $P \in \mathcal{E}^p$ 的代表元, 即 $P = \int \alpha \, dx$, 而 $F_1, \cdots, F_p \in \mathcal{F}$.

定理

Nijenhuis-Schouten 括号由如下公式给出:

$$[P, Q] = \int \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\theta_i} \frac{\delta\beta}{\delta u^i} + (-1)^p \frac{\delta\alpha}{\delta u^i} \frac{\delta\beta}{\delta\theta_i} \right) dx,$$

其中 $P = \int \alpha \, dx \in \mathcal{E}^p$, $Q = \int \beta \, dx \in \mathcal{E}^q$, 而 $\alpha \in \mathcal{S}^p$, $\beta \in \mathcal{S}^q$

(等价于 Getzler (2002) 和 Kersten, Krasil'shchik, Verbovetsky (2004) 给出的公式)

定义 (无穷维 Poisson 结构, 哈密顿结构)

一个 2-矢量 $P \in \mathcal{E}^2$ 称为是一个 Poisson 2-矢量如果 $[P, P] = 0$. 我们也称 P 为一哈密顿结构.

定义

一个哈密顿结构 P 称为是流体力学型的, 如果它有形式

$$P = \frac{1}{2}\int \theta_i \left(g^{ij}(u)\partial_x + \Gamma^{ij}_k(u)u^k_x\right)\theta_j\,dx$$

其中 $(g^{ij}(u))$ 为一非退化对称矩阵.

定理 (Dubrovin-Novikov, 1984)

设 P 为一流体力学型的哈密顿结构, 则存在坐标系 $\tilde{u}^1 \ldots, \tilde{u}^n, \tilde{\theta}^1, \ldots, \tilde{\theta}^n$, 使得

$$P = \frac{1}{2}\int \eta^{ij}\tilde{\theta}_i\tilde{\theta}^1_j\,dx,$$

这里 (η^{ij}) 为一非退化的常值对称矩阵.

定义

$$\deg u^{i,s} = \deg \theta_i^s = s, \ \deg f(u) = 0.$$

它给出了

$$\mathcal{S} = \oplus_{k\geq 0}\mathcal{S}^k, \ \mathcal{S}^k = \mathcal{A}\otimes\wedge^k(V)$$

上一个自然的分次. 令 P 为一流体力学型的哈密顿结构, 则 $\deg P = 1$. 它定义的复形 $(\mathcal{E}, P)$ 的 Poisson 上同调群有相应的分次

$$H^q(\mathcal{E}, P) = \bigoplus_{d\geq 0} H_d^q(\mathcal{E}, P), \quad H_d^q(\mathcal{E}, P) = \frac{\operatorname{Ker} P|_{\mathcal{E}_d^q}}{\operatorname{Im} P|_{\mathcal{E}_{d-1}^{q-1}}}.$$

定理

设 M 为一可缩流形, 则我们有

$$H_d^q(\mathcal{E}, P) \cong \begin{cases} 0, & d > 0 \\ \mathbb{R}^{\binom{n+1}{q+1}}, & d = 0. \end{cases}$$

Getzler (2002), Degiovanni, Magri & Sciacca (2005, for $q \leq 2$), Liu & Z. (2011)

证明 (Si-Qi Liu & Z., Adv Math 2011 对更一般的 Jacobi 结构:)

不失一般性我们可以假设 $P = \frac{1}{2}\int \eta^{ij}\theta_i\theta_j^1 dx$. 记 d_P 为 P 对应的微分. 我们引入算子

$$D_P = \sum_{i,s} \eta^{ij}\theta_j^{s+1}\frac{\partial}{\partial u^{i,s}},$$

它定义了 $\mathcal{S} = \oplus_{k\geq 0}\mathcal{A}\otimes \wedge^k(V)$ 上的一个微分. 我们有如下的复形的短正合列

$$0 \longrightarrow (\mathcal{S}, D_P) \xrightarrow{\partial} (\mathcal{S}, D_P) \xrightarrow{\int} (\mathcal{E}, d_P) \longrightarrow 0,$$

它诱导了长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_d^q(\mathcal{S}, D_P)) \longrightarrow H_d^q(\mathcal{E}, d_P) \longrightarrow H_d^{q+1}(\mathcal{S}, D_P) \longrightarrow \cdots,$$

故要证明定理, 我们只需计算 $H_d^q(\mathcal{S}, D_P)$.

记 $\theta^{i,s}=\eta^{ij}\theta_j^s$, 以及

$$V^0=\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathbb{R}\theta^{i,0}\right)\cong\mathbb{R}^n,\ \ V^{>0}=\bigoplus_{s>0}\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\mathbb{R}\theta^{i,s}\right),$$

则 $V=V^0\oplus V^{>0}$, 并且

$$\mathcal{S}=\mathcal{A}\otimes\wedge^*(V)=\mathcal{A}\otimes\wedge^*(V^{>0})\otimes\wedge^*(V^0),$$

故利用 universal coefficient theorem 我们得到

$$H_d^*(\mathcal{S},D_P)\cong H_d^*(\mathcal{S}^{>0},D_P)\otimes\wedge^*(\mathbb{R}^n),$$

这里 $\mathcal{S}^{>0}=\mathcal{A}\otimes\wedge^*(V^{>0})$.

将 $\theta^{i,s+1}$ 看成 $du^{i,s}$, 易知 $(\mathcal{S}^{>0}, D_P)$ 同构于 $J^\infty(M)$ 的 de Rham 复形, 因此我们有

$$H^*(\mathcal{S}^{>0}, D_P) \cong H^*_{dR}(J^\infty(M)) \cong H^*_{dR}(M) \cong \mathbb{R},$$

以及

$$H^q(\mathcal{S}, D_P) \cong H^q_0(\mathcal{S}, D_P) \cong \wedge^q(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{q}}.$$

因此由上述长正合列得到

$$0 \to H^q_0(\mathcal{S}) \to H^q_0(\mathcal{E}) \to H^{q+1}_0(\mathcal{S}) \to 0,\ 0 \to H^q_{d>0}(\mathcal{E}) \to 0,$$

故有

$$H^q(\mathcal{E}, d_P) \cong H^q_0(\mathcal{E}, d_P) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{q}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n}{q+1}} \cong \mathbb{R}^{\binom{n+1}{q+1}}.$$

□

定义

设 $P_1, P_2 \in \mathcal{E}^2$ 为满足条件 $[P_1, P_2] = 0$ 的两个哈密顿结构. 如果它们都是流体力学型的, 则我们称 (P_1, P_2) 为一流体力学型的双哈密顿结构.

引理

设 (P_1, P_2) 为一流体力学型的双哈密顿结构, 而 $d \geq 1$, $q \geq 1$, 则我们有

$$BH_d^q(\mathcal{E}, P_1, P_2) \cong \frac{\operatorname{Ker} d_1 \cap \operatorname{Ker} d_2 \cap \mathcal{E}_d^q}{\operatorname{Im}(d_1 d_2) \cap \mathcal{E}_d^q}.$$

(Dubrovin & Z., 2001)

令 (P_1, P_2) 为一流体力学型的双哈密顿结构，我们引进算子

$$D_a = \sum_{i,s} \left(\partial^s(\delta^i P_a) \frac{\partial}{\partial u^{i,s}} + \partial^s(\delta_i P_a) \frac{\partial}{\partial \theta_i^s} \right), \ a = 1, 2,$$

其中 $\delta_i = \frac{\delta}{\delta u^i}$，$\delta^i = \frac{\delta}{\delta \theta_i}$. 它们为 $\mathcal{S}$ 上的导子，满足性质

$$D_1^2 = 0, \ D_1 D_2 + D_2 D_1 = 0, \ D_2^2 = 0,$$

所以我们有另一双复形 $(\mathcal{S}, D_1, D_2)$，我们也可以定义它的双哈密顿上同调

$$BH_d^q(\mathcal{S}, D_1, D_2) \cong \frac{\operatorname{Ker} D_1 \cap \operatorname{Ker} D_2 \cap \mathcal{S}_d^q}{\operatorname{Im}(D_1 D_2) \cap \mathcal{S}_d^q}.$$

引理 (Liu, Z. 2013)

上述双复形的短正合列

$$0 \longrightarrow (\mathcal{S}, D_1, D_2) \xrightarrow{\partial} (\mathcal{S}, D_1, D_2) \xrightarrow{\int} (\mathcal{E}, d_1, d_2) \longrightarrow 0$$

诱导了双哈密顿上同调的一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow BH^q_{d\geq 2}(\mathcal{S}) \longrightarrow BH^q_{d\geq 2}(\mathcal{E}) \longrightarrow BH^{q+1}_{d\geq 2}(\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots.$$

要证明半单流体力学型的双哈密顿结构形变的存在性，我们需要证明 $BH^3_{\geq 6}(\mathcal{E}) \cong 0$. 从上述长正合列我们知道，我们只需要证明

$$BH^3_{d\geq 6}(\mathcal{S}) \cong 0, \quad BH^4_{d\geq 6}(\mathcal{S}) \cong 0.$$

定理

设 (P_1, P_2) 为 $J^\infty(M^n)$ 上的半单流体力学型双哈密顿结构, 则其双哈密顿上同调有性质

$$BH^2_d(\mathcal{E}, P_1, P_2) \cong \begin{cases} 0, & d = 2, d \geq 4, \\ \bigoplus_{k=1}^n C^\infty(\mathbb{R}), & d = 3. \end{cases},$$

$$BH^3_{d\geq 5}(\mathcal{E}, P_1, P_2) \cong 0.$$

上述定理中 $BH^2_d(\mathcal{E}, P_1, P_2)$ 的结论由 Dubrovin, Liu, Z. 证明

1. S.-Q. Liu, Y. Zhang, Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type, *J. Geom. Phys.* 54(2005), 427–453.
2. B. Dubrovin, S.-Q. Liu, Y. Zhang, On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws I: quasi-triviality of bi-Hamiltonian perturbations, *Commun. Pure and Appl. Math.* 59(2006), 559-615.

由此我们得到了半单流体力学型双哈密顿结构形变的唯一性定理的证明.

上述定理中关于 $BH_d^3(\mathcal{E}, P_1, P_2)$ 的结论当 $n = 1$ 时由 Liu, Z. 证明, 对一般的 n 由 Carlet, Posthuma, Shadrin 最近的预印本给出证明.

1. S.-Q. Liu, Y. Zhang, Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case, *Commun. Math. Phys.* 324 (2013), 897–935.
2. G. Carlet, H. Posthuma, S. Shadrin, Deformations of semisimple Poisson pencils of hydrodynamic type are unobstructed, eprint arXiv:1501.04295.

由此我们得到了半单流体力学型双哈密顿结构形变的存在性定理的证明.

8. 未解决的问题

对于 2 维拓扑场论对应的可积方程簇的双哈密顿结构，作为流体力学型双哈密顿结构的中心不变量为 $\frac{1}{24}$ 的形变类的代表元，如何刻画它？为此我们需要进一步考虑满足某种 tau 对称条件和 Virasoro 对称性条件的双哈密顿结构的性质.

谢谢