湍流：十九世纪的问题，二十一世纪的挑战

报告人：何国威

中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室

二〇一五年十一月四日

主要内容

- 引言
- 湍流的两个主要进展：

  湍流的统计理论和数值模拟
- 湍流的三个新挑战：

  湍流燃烧，湍流噪声，生物推进
- 结束语：3（+1）个相关数学问题

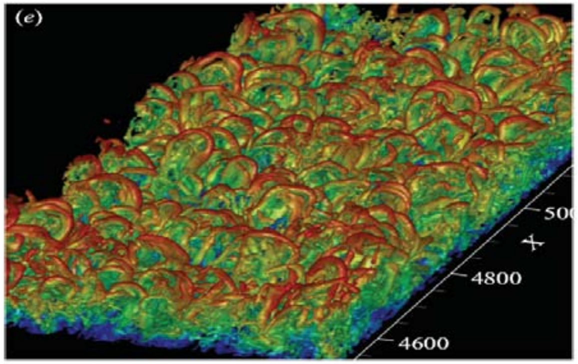
湍流：流体力学的核心问题之一

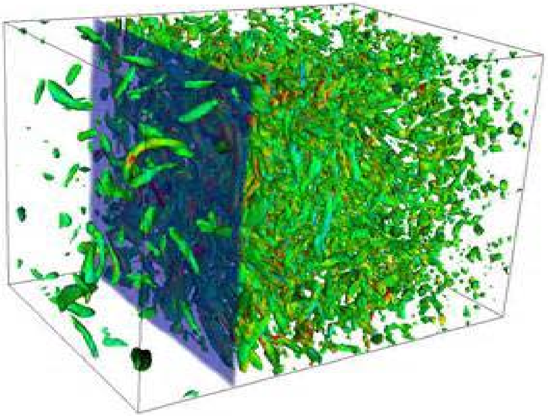
- 什么是湍流？有序和无序的相互作用
  - 完全有序：确定性方法
  - 完全无序：随机方法

没有现存的方法描述湍流

对人类智慧和认识的挑战

- 海森堡说：我要带两个问题去问上帝，一个是量子力学，一个是湍流。我估计第一个问题是有答案的。
- 湍流的困难：
  - 3D unsteady chaotic nature
  - Non-linear interaction at vastly different scales





Fluid Dynamics: Meeting National Needs

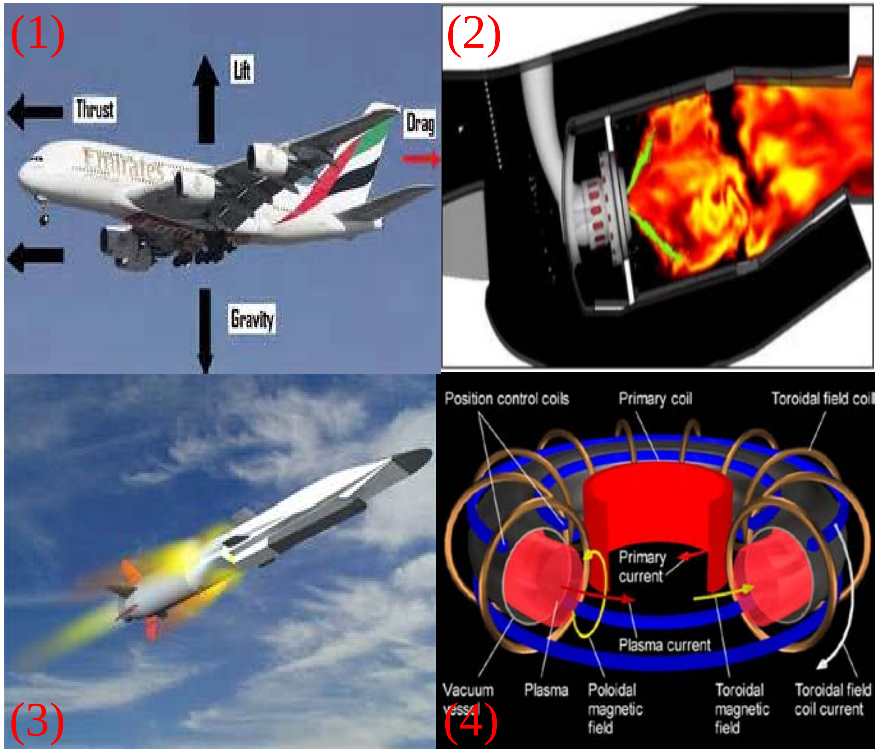
- 三个领域：
  - Transportation systems
  - Process industries
  - Natural environment
- 四个主要问题：

（1）Aircraft/Vehicle: 湍流升阻力

（2）Engine(aircraft & ships): 湍流燃烧

（3）Hypersonic flight: 边界层转捩

（4）Inertial-confinement fusion: 湍流混合



美国理论与应用力学国家委员会2006年度报告

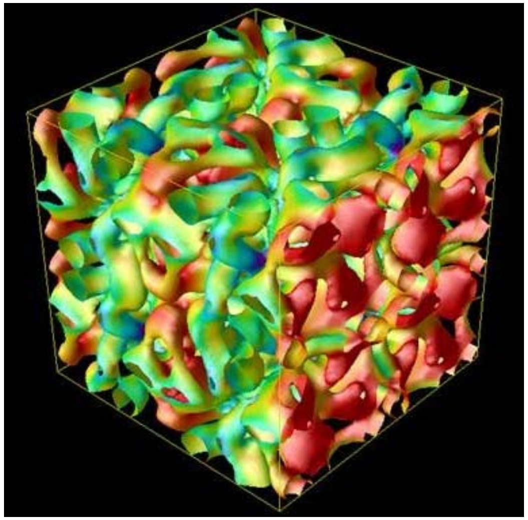
Navier-Stokes (NS) 方程的湍流

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

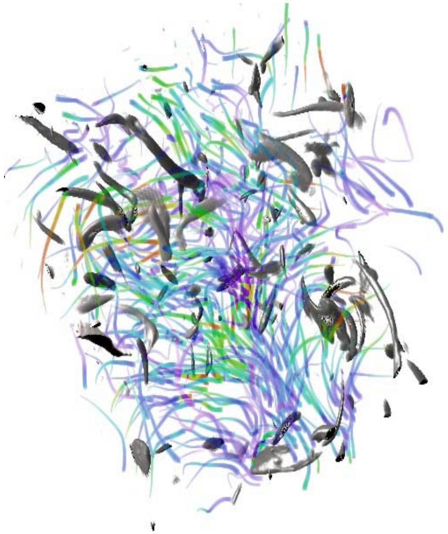
$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

控制方程：Navier(1827)，Stokes(1845)

湍流现象：Reynolds number（1894）

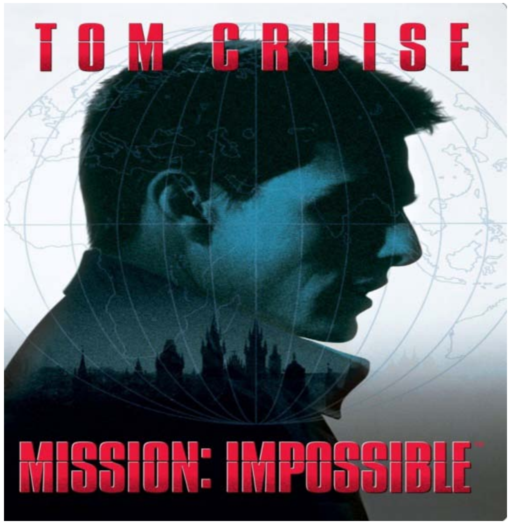


- 数学家：NS方程解的存在唯一性 （克雷数学问题）
- 物理学家：湍流作为非平衡态的普适性质
- 力学家：工程湍流的预测和设计
  - 边界层方程：飞机设计的基本理论
  - 湍流的统计理论：所有湍流的基本物理图像
  - 数值模拟：新一代的工业设计工具



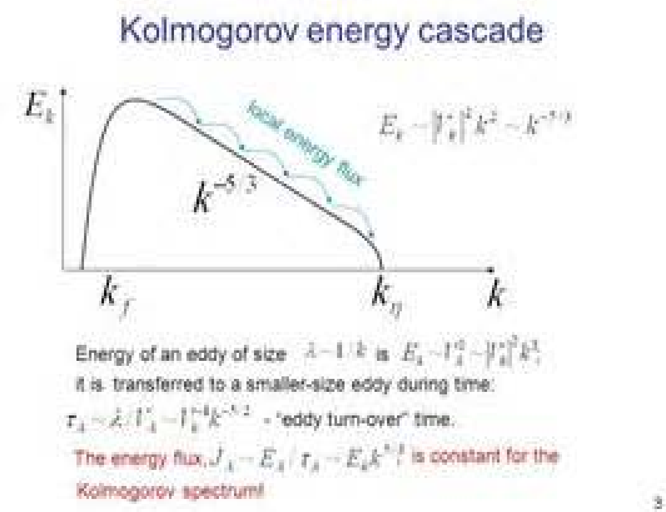
湍流研究的目标

- 终极目标：Navier-Stokes方程的解
  - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=?$
  - mission：impossible
- 有限目标：NS方程解的性质
  - 能量分布：$E(k)=\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{u}(-\boldsymbol{k},t)\rangle$
  - 压力分布：$P(\boldsymbol{x},t)=?$
- 工业应用：湍流与其它物理过程耦合
  - 湍流与化学反应
  - 湍流与声波
  - 湍流与运动物体

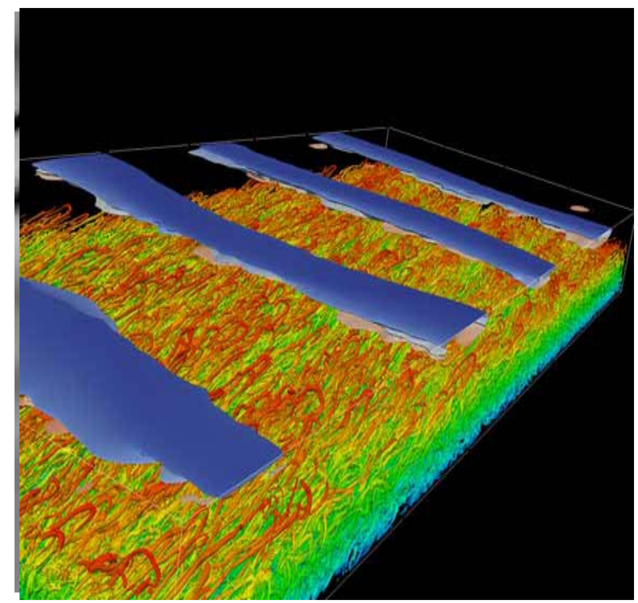


湍流70年的两个主要进展

- **湍流统计理论（1940）：**
  - 一 柯尔莫哥洛夫 , Kraichnan , 周培源
  - 一 EDQNM，DIA(JFM 引用率最高)
  - 一 特点： 流体力学 +应用数学+ 统计物理



- **湍流的计算机模拟（1980）**
  - 一 Moin(1987)（JFM引用率最高）：
    直接数值模拟槽道湍流
  - 一 湍流的大涡模拟：气象学家从1963年开始
  - 一 特点： 流体力学 + 计算数学+计算机



进展1 湍流的统计理论：EDQNM

- NS方程的Fourier形式： $(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2)u=\sum uu$
- 能量（二阶矩）方程（周培源）

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2)<uu>=\sum<uuu> \quad = \quad \sum<uu><uu>$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2)<uuu>=\sum<uuuu> \;\underset{<uu><0}{\overset{\text{高斯封闭}}{=\!=\!=}}\; \sum<uu><uu>}$$

- 引入涡阻尼系数的能量方程

$$(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2)E(k,t)=\int\theta(\mathrm{t})\sum<uu><uu>dp$$

- 涡阻尼系数 $\theta(k)$ ：时间尺度是湍流的重要问题
  - 欧拉时空关联 $\theta(k)\propto(\nu k)^{-1}$ ： $E(k)\propto k^{-3/2}$
  - 拉格朗日时空关联 $\theta(k)\propto\varepsilon^{-1/3}k^{-2/3}$ ： $E(k)\propto k^{-5/3}$

时空关联：湍流的基本问题

- Kolmogorov(1941): 空间能量谱

$$E(k) \sim k^{-5/3}$$

- Tennekes(1975): 时间能量谱

$$E(\omega) \sim V^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{5}{3}}$$

- 时空能量谱（时空关联）

$$E(k, \omega) = ?$$

时空关联的定义

- 两点两时刻的速度关联

$$C(r,\tau)=\left\langle u_i(x,t)\,u_i(x+r,t+\tau)\right\rangle$$

- 时空能量谱

$$E(k,\omega)=\left|\int C(r,\tau)\exp(-i\varpi\tau+ikr)\,d\tau\,dr\right|$$

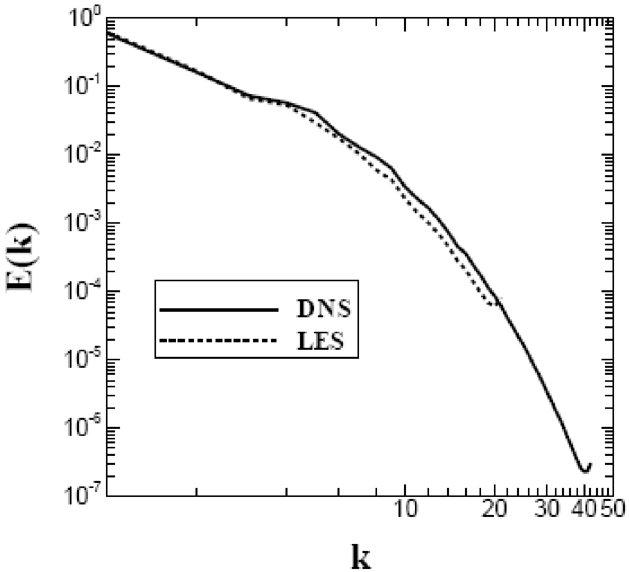
- 空间能量谱

$$E(k)=\int E(k,\varpi)\,d\varpi$$

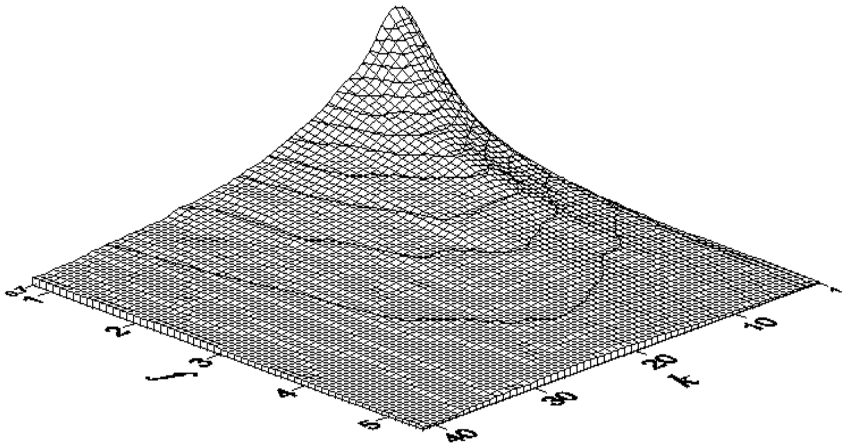
- 傅立叶模态的时空关联

$$C(k,\tau)=\left\langle u_i(k,t)\,u_i(-k,t+\tau)\right\rangle$$

时空能量谱（时空关联）的主要问题



空间能量谱



时空能量谱

- 时空能量谱（时空关联）的普适特性:模型
- 大涡模拟预测时空能量谱：时间精确的大涡模拟

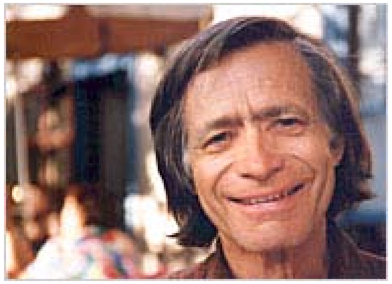
时空关联的主要结果和问题

- **Taylor冻结流模型(1938)：** 弱剪切湍流
  - 湍流模型的基础，实验测量的工具：
  - 林家翘和Lumley：不适合强剪切湍流，如湍流热对流
- **Kraichnan下扫模型(1964)：** 均匀各向同性湍流
  - 经典DIA理论的基础
  - 不适合工程实际的剪切湍流
- **问题：剪切湍流的时空关联模型**
  - 现状：泰勒框架下的改进 – 线性模型

    如：Corrsin，Jimenez，Townsend …
  - 意义：湍流能量在时空尺度上的分布规律

G. I. Taylor

现代流体力学的奠基人



R.H. Kraichnan

美国科学院院士，

爱因斯坦的学生

He GW, Chen S, Kraichnan RH, Zhang R and Zhou Y 81 21 4636 (1998) Phys. Rev. Lett

剪切湍流的EA (Elliptic Appr.) 模型

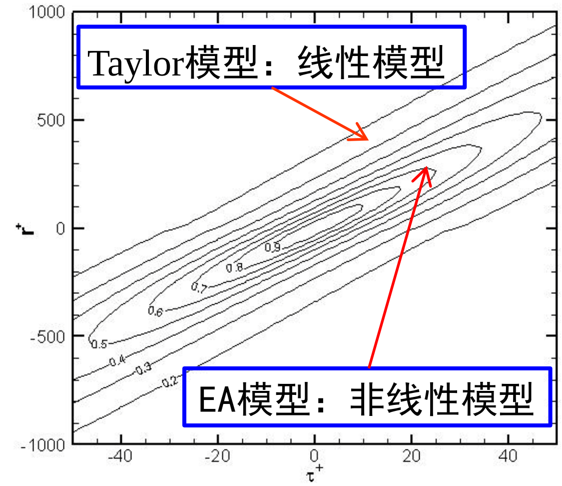
- **EA模型的关键：** 涡的畸变 – 非线性模型

  —Taylor 模型：涡的传播

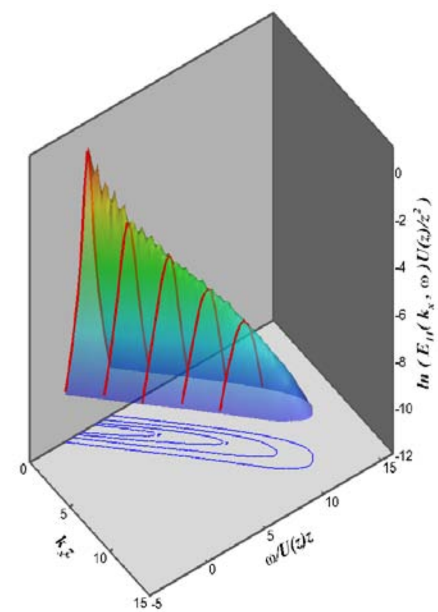
  —EA 模型：　　涡的传播与畸变耦合

- **EA模型的内容**

EA模型	$R(r,\tau)=R\left(\sqrt{(r-U\tau)^2+V^2\tau^2},0\right)$	涡传播和畸变耦合
Taylor模型	$V=0$: $R(r,\tau)=R(r-U\tau,0)$	涡传播：速度 U
Kraichnan	$U=0$: $R(r,\tau)=R\left(\sqrt{r^2+V^2\tau^2},0\right)$	涡畸变：速度 V



时空关联等位线



- **EA模型: 剪切湍流的基本模型**

- 实验：把时间信号转换为空间信号
- 计算：Time-accurate large-eddy simulation
- 理论：时空能量谱 （湍流演化的去关联过程）

EA 模型的理论推导

- 湍流的两个基本性质

(1) Taylor 相似性：湍流的涡具有不变的局部传播速度 U

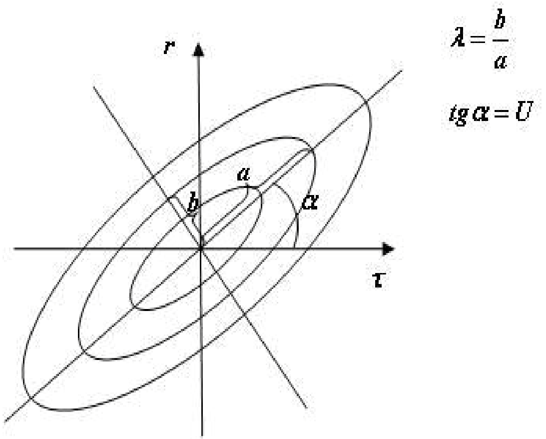
→ 关联等位线共有一个主轴方向： $\mathrm{tg}^2\alpha \approx \mathrm{U}^2$

(2) Kolmogorov 相似性：湍流的涡具有相同的畸变速度 V

→ 关联等位线有一个相同长短比： $\lambda^2 = \mathrm{V}^2$

- EA模型

$$R(r,\tau) = R(\sqrt{(r-U\tau)^2 + V^2\tau^2}, 0)$$



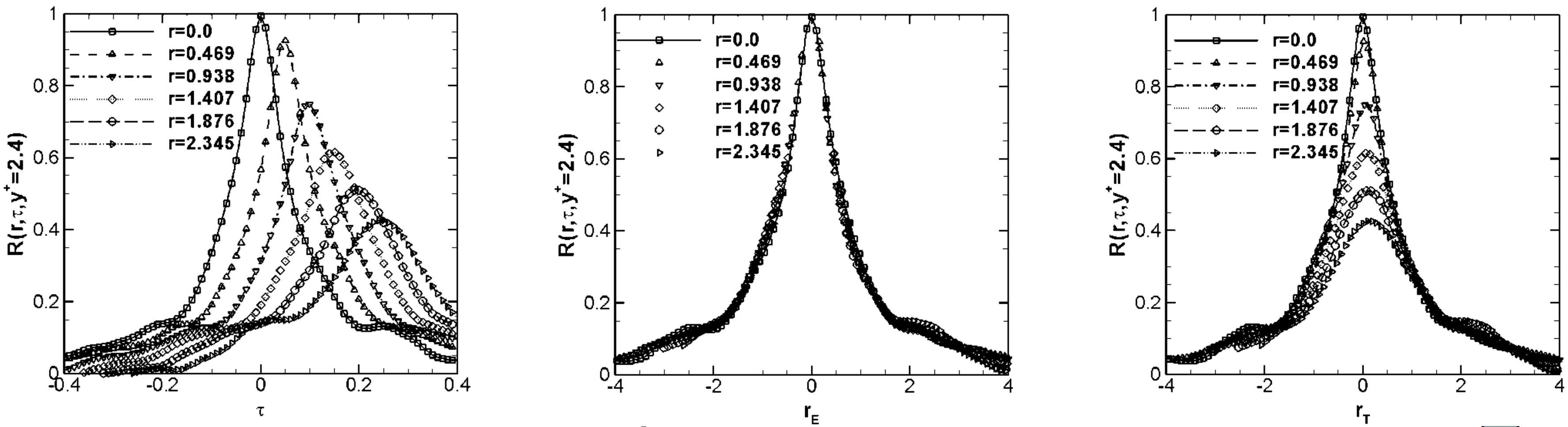
- 方法：时空关联的等位线

EA模型的数值验证：槽道湍流

流向分量
流向分离

- 时空关联在分离距离 r 对分离时间 τ 的变化，

$y_2^+ = 2.4$



椭圆模型:

$$R(r,\tau)=R(\sqrt{(r-U\tau)^2+V^2\tau^2},0)$$

R vs $r_E^* = \pm\sqrt{(r-U\tau)^2+V^2\tau^2}$

泰勒假设

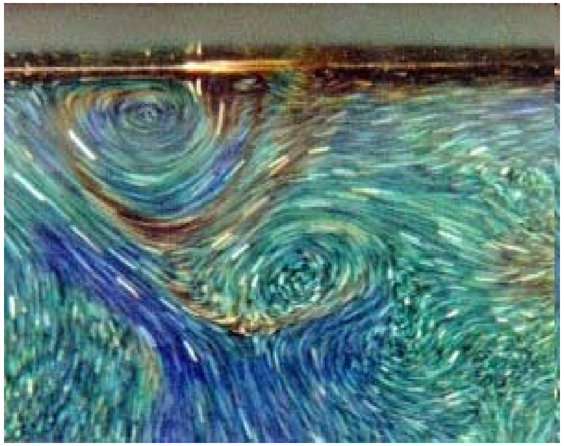
$$R(r,\tau)=R(r-U\tau,0)$$

R vs $r-U\tau$

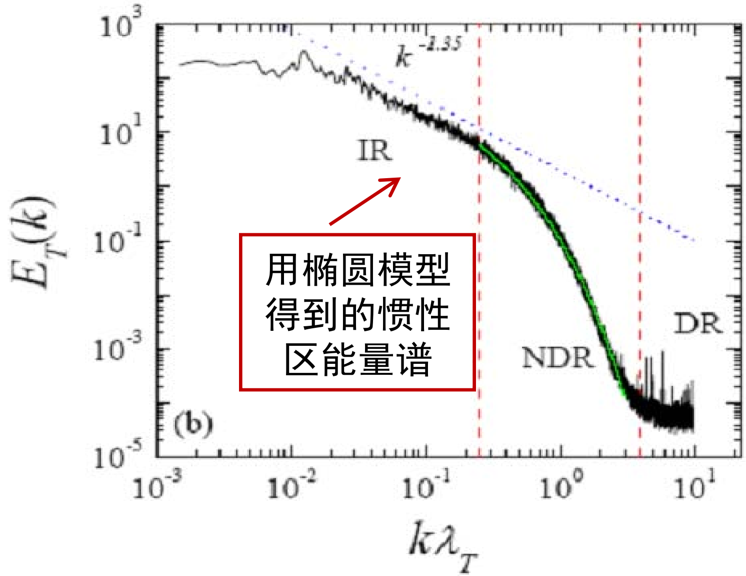
用EA模型重新标度，所有曲线重合为一条

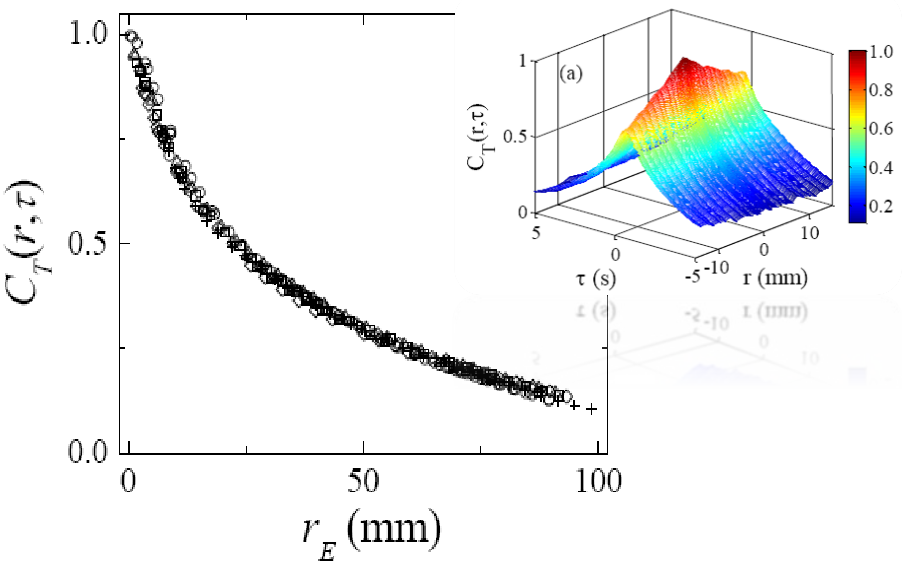
EA模型的实验研究：湍流热对流实验

- 湍流热对流实验
  - 强剪切：Taylor模型的条件不满足
  - 从实验得到了湍流能量谱：时空信号转换
- 验证EA：用EA模型重新标度，曲面重合为曲线



湍流热对流速度场





He, He & Tong: Phys Rev E 81 065303 (R) 2010

时空关联的进展

- # 湍流时空关联模型

欧拉	不可压缩	EA 模型 （2006）	$R(r,\tau)=R\left(\sqrt{(r-U\tau)^2+V^2\tau^2},0\right)$	涡传播+畸变
		Taylor模型（1936）	$V=0$: $R(r,\tau)=R\left(r-U\tau,0\right)$	涡传播：速度 U
		Kraichnan （1964）	$U=0$: $R(r,\tau)=R\left(\sqrt{r^2+V^2\tau^2},0\right)$	涡畸变：速度 V
	可压缩	Swept-wave模型（2014）	$R(k,\tau)=\cos(kc\tau)\exp(-\frac{1}{2}k^2V^2\tau^2)$	涡畸变 + 声波
		Wave (斯坦福：Lee, Lele，Moin) （1992）	$R(k,\tau)=\cos(kc\tau)$	声波
拉格朗日	EA模型（2009）	$R(r,\tau)=R\left(\sqrt{r^2+V^2\tau^2},0\right)$		强剪切
	Hay-Smith	$R(r,\tau)=R\left(r-U\tau,0\right)$		弱剪切

- 时空能量谱的模型 → 湍流噪声谱
  - 涡传播 U:多普勒 shifting
  - 涡畸变 V:多普勒 broadening （Wilzeck & Meneveau, JFM 2015)

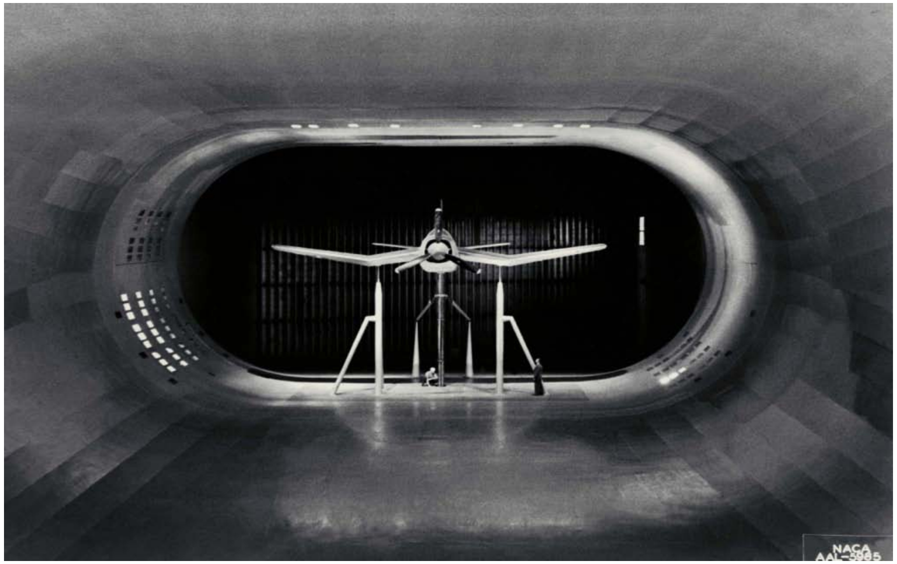
成果2 湍流的数值模拟：代替实验的设计工具

- LES vs DNS and RANS

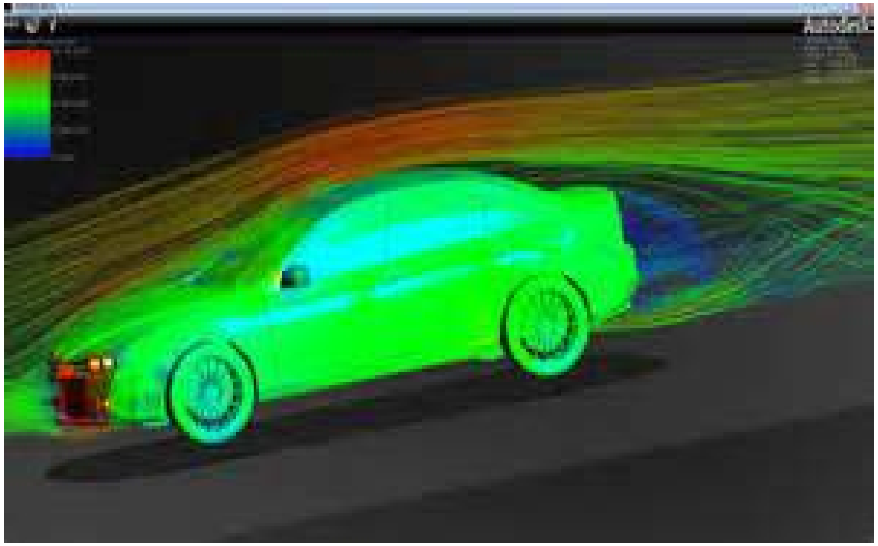
	Cost	Unsteady Statistics	Turbulence models	
DNS	**Unacceptable**	**Truly representative**	**Not necessary**	$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=?$
LES	**Affordable**	**Predictable**	**Universal**	$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}$
RANS	**Cheap**	**Difficult (URANS)**	**Empirical**	$\langle\boldsymbol{u}\rangle=\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)dt$

- 历史发展
  - 1980 Reynolds + Moin : LES
  - 1987 DNS
  - 1990 LES
  - 2000 multi-scale, multi physics LES
  - 2010 LES for complex turbulence

计算流体力学第一个里程碑：数值风洞



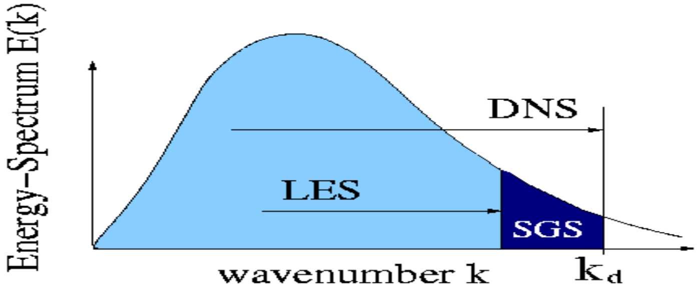
- 全世界最大的风洞：NASA
- 汽车的全车数值模拟
- 飞机全机数值模拟 ？



LES: a brief introduction

- Large eddy simulation (LES)
  velocity =large scales + small scales

  ↑ computed ↑ modeled



- Filtered Velocity: $\bar{u}_i(x,t) = \frac{1}{V}\int_\Omega u_i(y,t)G(y-x)dy$, G is a filter.

  The filtered Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)$$

- Key issues in LES: the filtered N-S equation

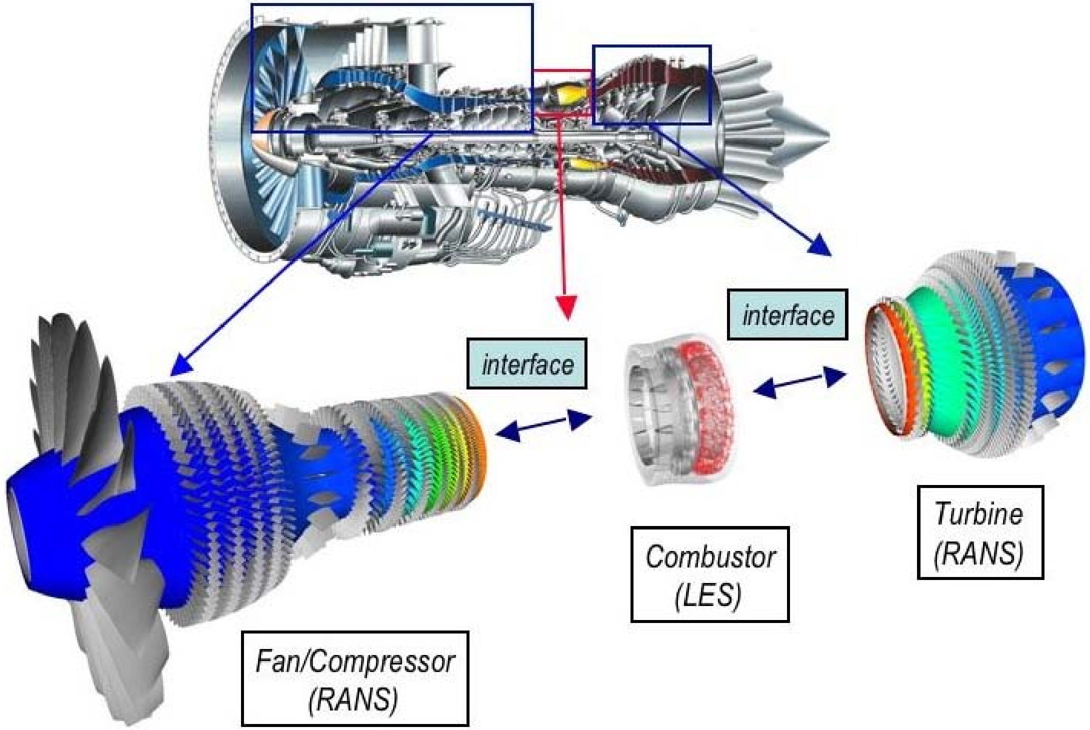
  1. Filtering: mathematic framework ← deconvolution
  2. Subgrid scale modeling: energy dissipations ← filter sizes
  3. Numerical algorithm: truncated errors ← grid sizes

P. Moin, Inter. J. Heat & Fluid flows, 23 (2002) 710-720

大涡模拟方法的基本数学问题

- 滤波速度 $\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\int_{\boldsymbol{x}-\varepsilon}^{\boldsymbol{x}+\varepsilon}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}$
- 滤波NS方程 $\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\overline{u}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_iu_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j)$
- 基本问题
  - 非线性项的近似表达式 $\overline{u_iu_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j=?$
  - 滤波NS方程的解是否收敛于NS方程的解
- 滤波LES方程是否收敛NS方程：Camassa-Holm方程

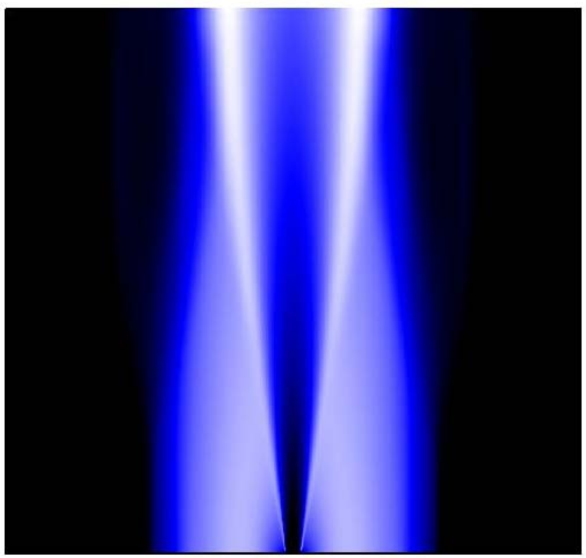
里程碑2 航空发动机全机数值模拟：大涡模拟



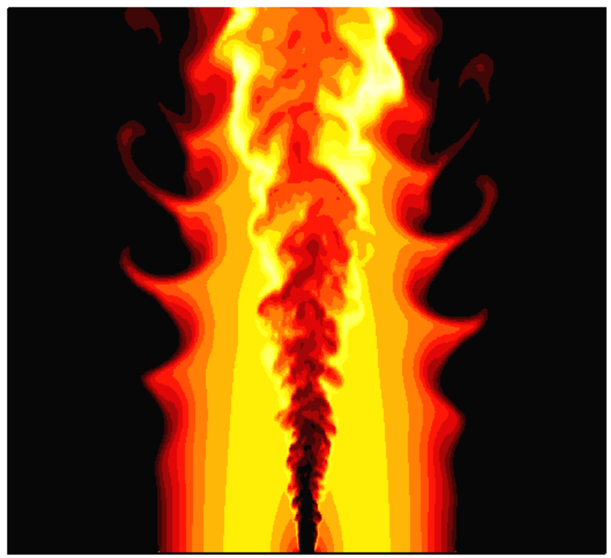
- 压气机：高速流，强逆压梯度
- 燃烧室：低速流，高温升
- 涡轮 ：高速流，结构复杂
- 全机数值模拟(2008年)：4000节点，14天

湍流燃烧的大涡模拟

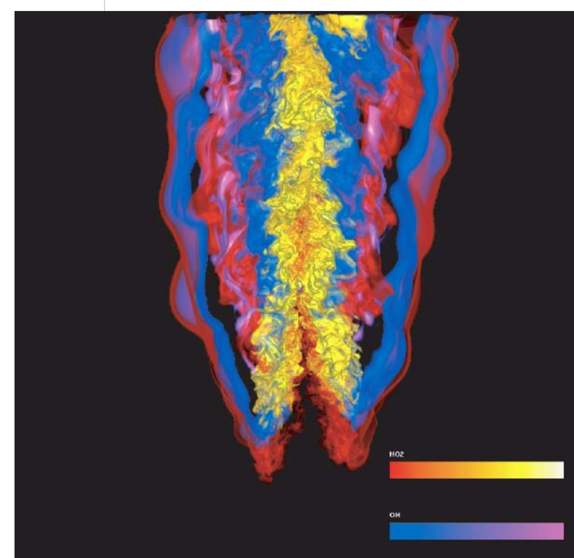
- 强湍流，强混合；瞬态温度波动大
- 湍流模型和燃烧模型的双方面挑战
- 主要进展：点火与熄火过程 － 航空发动机的点火和熄火



雷诺平均



大涡模拟



直接数值模拟

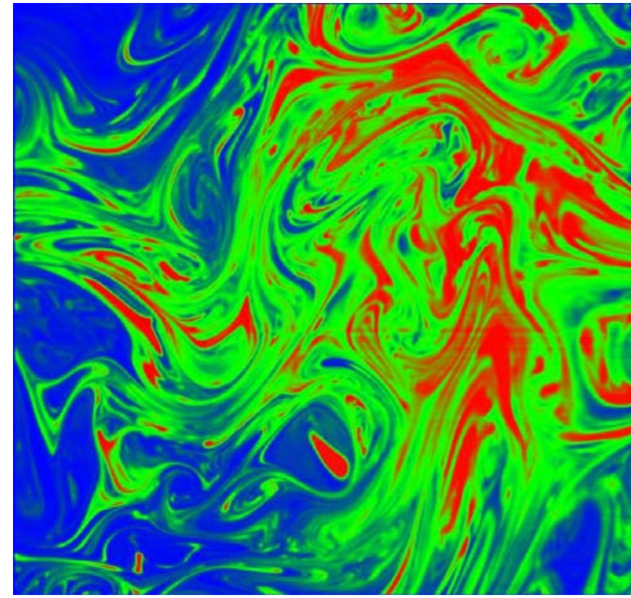
非预混的湍流燃烧

- 湍流和化学反应的耦合
  - 湍流：Navier-Stokes方程

$$\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = \kappa \nabla^2 \varphi + Q(\varphi)$$

  - 化学反应的组份方程：对流–反应–扩散方程

$$\mathbf{u} : \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$



- 组份方程的刚性

- 复杂的几何边界条件

The PDF transport equation

- PDF $f(\varphi;\mathbf{x},t)$ at one point $\mathbf{x}$, one time t

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\underbrace{\left[\langle \mathbf{u}\mid \Psi\rangle f\right]}_{\substack{\text{Modeled}\\ \textit{Homogeneous:zero}}}+\frac{\partial}{\partial \psi}\underbrace{\left[\left\langle \kappa\nabla^{2}\varphi\mid\psi\right\rangle f\right]}_{\text{Modeled}}+\frac{\partial}{\partial \psi}\underbrace{\left[Q(\psi)f\right]}_{\text{Exact}}=0$$

- Key problem: conditional Laplacian (diffusion)

$$\chi=\left\langle \kappa\nabla^{2}\varphi\mid\psi\right\rangle$$

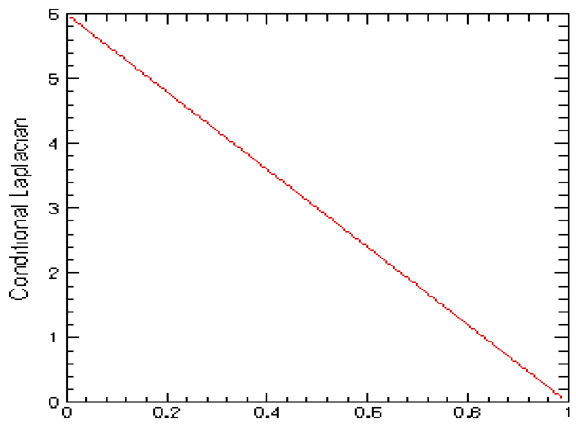
- Non-premixed combustion, particle dispersion

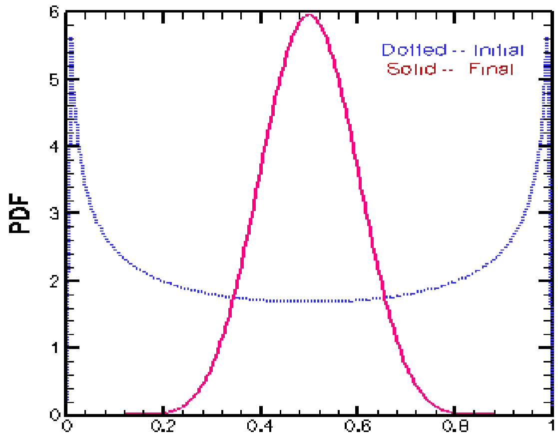
  in turbulence and micro-fluidics.

Gaussian closure: 不能描写混合过程

$$\left\langle \kappa \nabla^2 \varphi \mid \psi \right\rangle = -\frac{1}{2\tau}\left(\psi - \langle \varphi \rangle\right)$$

- Linear shape: no relaxation to Gaussian in diffusion





- **Time scale τ: free parameter**

k-ε model doesn't include the effects of reaction

$$\text{passive scalar}: \ \tau = k / \varepsilon$$

$$\text{reactive scalar}: \tau = k / \left| \varepsilon - \left\langle \varphi Q(\varphi) \right\rangle \right|$$

Mapping closure: nonlinear mapping of Gaussian closure

- Basic idea

$$\varphi = X\left(\theta(x), t\right)$$

$$\varphi(x,t) \leftarrow \theta(x,t)$$

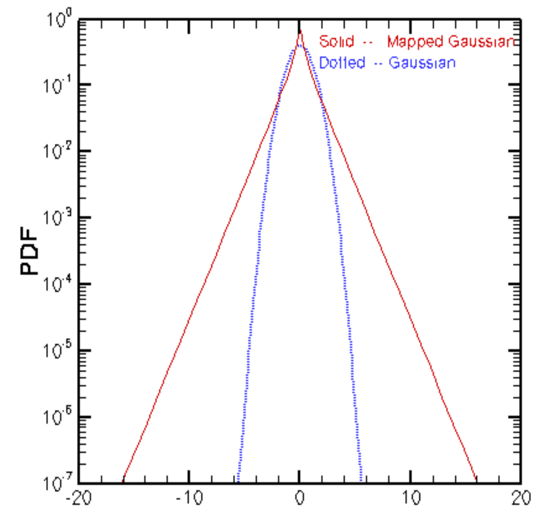
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$P(\psi,t) \leftarrow P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

$$\uparrow$$

$$P(\psi,t) = P(\theta)\left[\partial X/\partial\theta\right]^{-1}$$

- Nonlinear mapping



$$\varphi = X(\theta) = 0.5(\theta + \theta\,|\,\theta\,|)$$

- Nonlinear mapping X : W-H expansion
- Reference field θ ? its two-point correlation $\rho(r,t)$?

The model equations from MCA

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -2\kappa\rho''(0,t)\left[\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} - \theta\frac{\partial X}{\partial \theta}\right] + Q(X) \qquad P(\psi,t) = P(\theta)[\partial X/\partial \theta]^{-1}$$

$$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \bullet \langle(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)X_1X_2\rangle\left\langle\frac{\partial X_1}{\partial \theta_1}\frac{\partial X_2}{\partial \theta_2}\right\rangle^{-1} = 2\kappa \bullet$$

$$\left[\rho''(r,t) + \frac{\rho'(r,t)}{r} - 2\rho(r,t)\rho''(0,t) + \rho'^2(r,t)\left\langle\frac{\partial^2 X_1}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial \theta_2^2}\right\rangle\left\langle\frac{\partial X_1}{\partial \theta_1}\frac{\partial X_2}{\partial \theta_2}\right\rangle^{-1}\right]$$

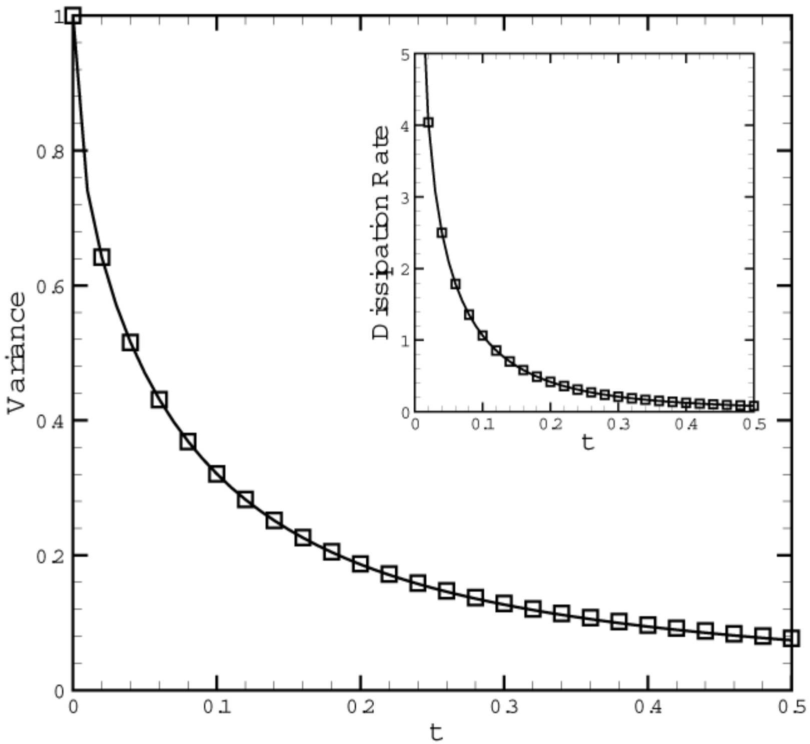
- Comparison with DNS of scalar mixing
- Numerical algorithm: Adams-Bashforth in time

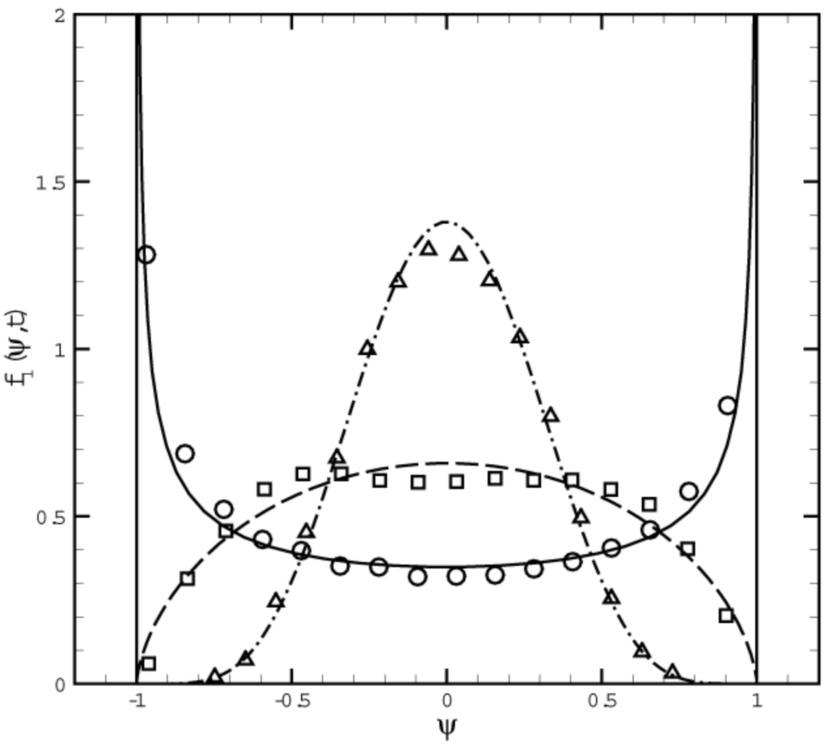
  4th-order finite difference in space
- Statistics: variance, dissipation and PDF

Diffusion process: a basic test only for conditional Laplacian

$$\partial_t \varphi = \kappa \nabla^2 \varphi \quad (\kappa = 0.01)$$

Periodic boundary, initial double-delta distribution $E_\varphi(k) \propto k^{-17/3}$





湍流噪声的大涡模拟（飞行器和潜艇噪声）

Surface pressure **Flow velocity**

$$I = \boxed{\frac{x_i x_j}{16\pi^2 \rho_0 c_0^3 |\mathbf{x}|^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \oint_S R_p(\mathbf{r},\tau) n_i n_j dS} + \boxed{\frac{\rho_0}{16\pi^2 c_0^5} \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^6} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \int R_{ik}(\mathbf{r},\tau) R_{jl}(\mathbf{r},\tau_0) d\mathbf{r}}$$

Pressure space-time correlation

$$\boxed{R_p(\mathbf{r},\tau) = \left\langle \overline{(p-p_0)(\mathbf{x},t)\cdot(p-p_0)(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)} \right\rangle}$$

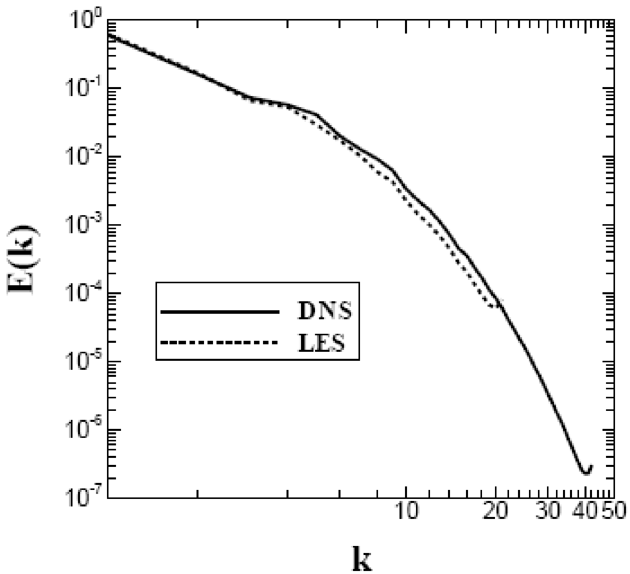
Velocity space-time correlation

$$\boxed{R_{ij}(\mathbf{r},t) = \left\langle \overline{u_i(\mathbf{x},\tau)\cdot u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)} \right\rangle}$$

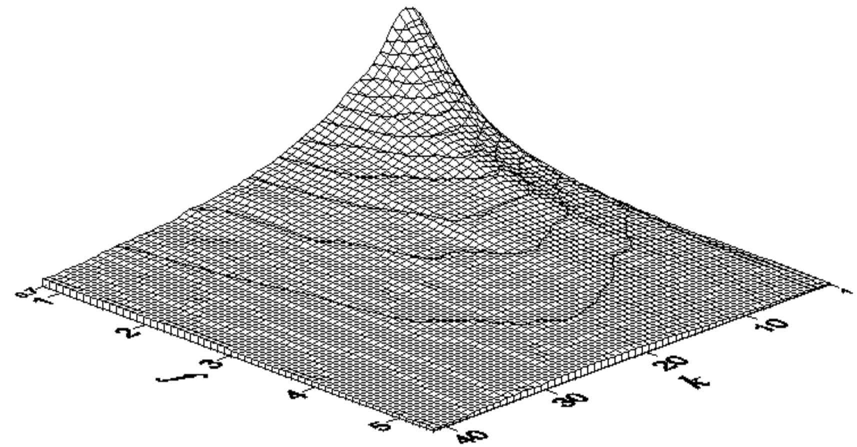
- Lighthill acoustic analogy: Acoustic intensity at far-field is determined by space-time correlation or wavenumber-frequency energy spectra. Wavenumber Energy spectra alone are not sufficient.

- Some CFD software only considers the acoustic compact source. This is a trivial case without retarded time “\tau”, where space-time correlation is incorrectly modeled.

湍流噪声大涡模拟的关键：时空关联



Wavenumber energy spectra



Wavenumber and frequency energy spectra

f : frequency; k: wavenumber ; vertical axes: energy spectra

- 时空能谱（时空关联）：　湍流噪声的重要问题
- 时间精确的大涡模拟：　预测湍流的时空关联

Time-accurate large-eddy simulation (LES)

- LES vs DNS and RANS

	Cost	Time scales (Unsteady Statistics)	Turbulence models
DNS	**Unacceptable**	**Truly representative**	**Not necessary**
LES	**Affordable**	**Predictable**	**Universal**
RANS	**Cheap**	**Difficult (URANS)**	**Empirical**

- A time-accurate LES
  - Conventional LES correctly predicts energy spectra: spatial scales

    ← Subgrid scale models are developed on energy budget equation
  - Time accurate LES: predict frequency spectra: time scales

    ←That is a new challenge to turbulence theory and modeling .

Time-accurate large-eddy simulation

1. Filtering approach

   - LES: spatial filtering, temporal filtering（违反伽利略不变性）

   - proposed filter: space-time filtering

2. Sub-grid scale model

   - dynamic procedure for eddy-viscosity SGS model

   - proposed model: EA model for space-time correlations

     Kinematic SGS model, Vremann model

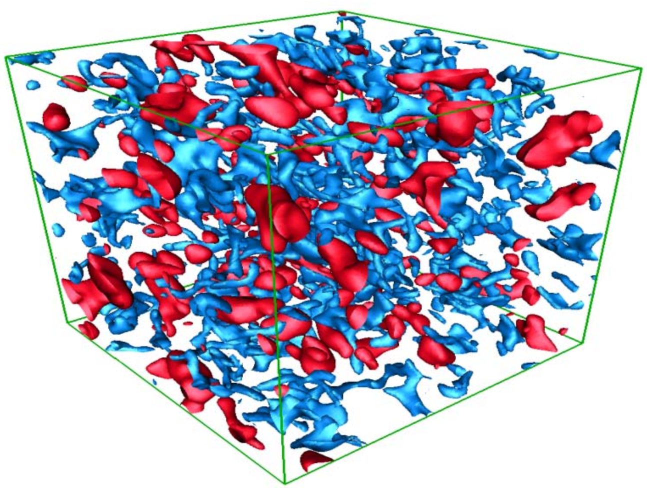
3. Numerical methods

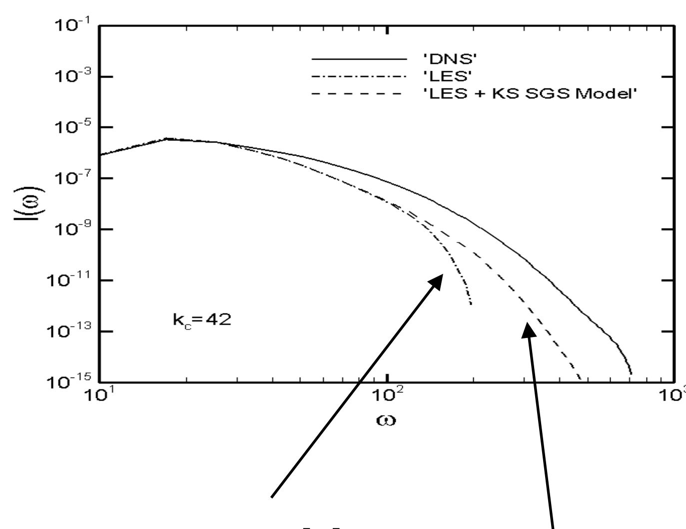
   - kinematic energy conservation

   - proposed method: space-time conservation

湍流噪声大涡模拟的亚格子模型

- Dynamic SGS model for unresolved scales in turbulence
- Kinematic SGS model for missing scales in turbulence-generated noise
- Benchmark: Noise radiated from isotropic turbulence





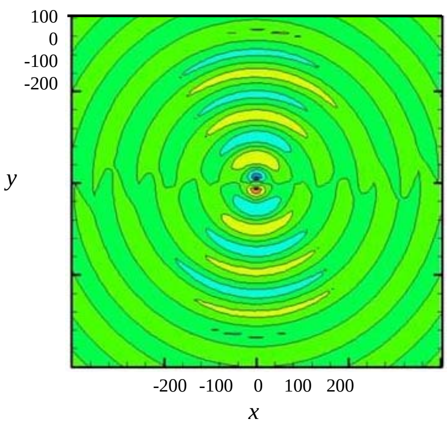
Dynamic model

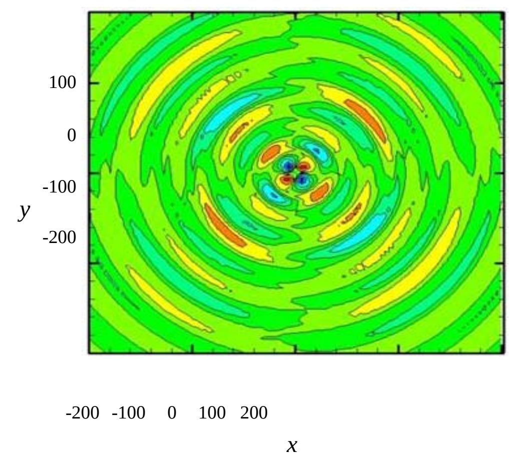
Kinematic model

p'

LES of turbulent wake and sound radiation

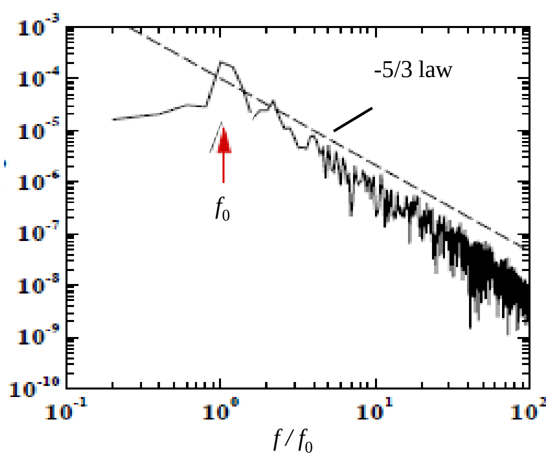
- 圆柱尾流的大涡模拟： Re=3900，cell number 6x10^6
  - Vremann SGS model – Transition & separation
  - 远场噪声： Curle 积分

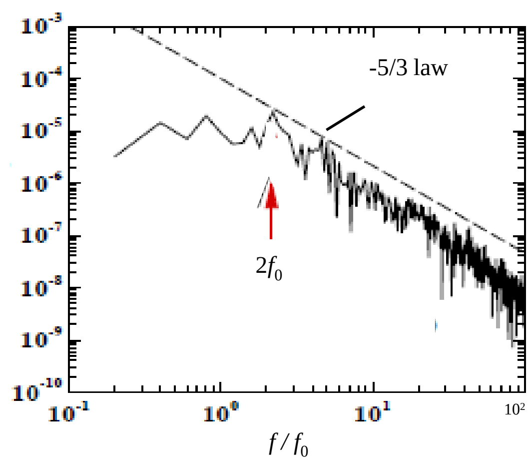


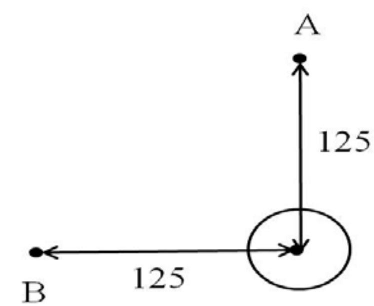


- 压力脉动的偶极子
  速度脉动的四极子

- 远点噪声谱:峰值+宽谱

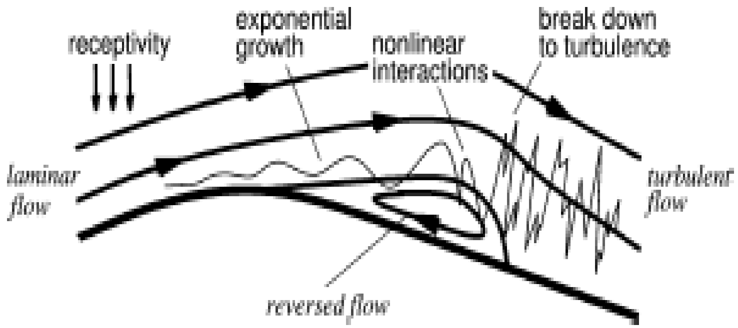






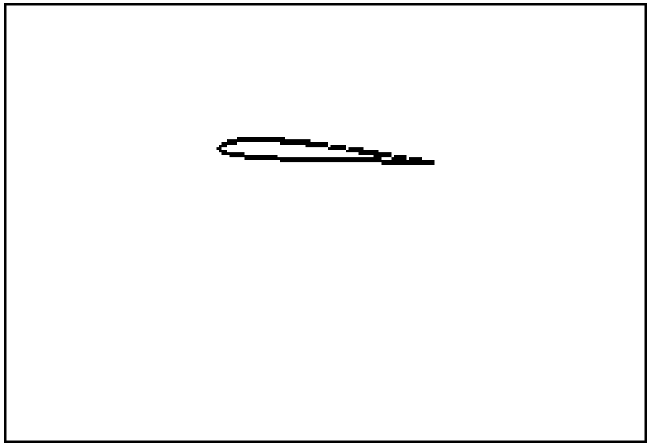
大雷诺数时生物推进的大涡模拟 （可操纵性）

- 湍流的转捩、分离和再附：大涡模拟
  - Laminar-bubble Separation
  - Receptivity ⇨ Linear growth stage



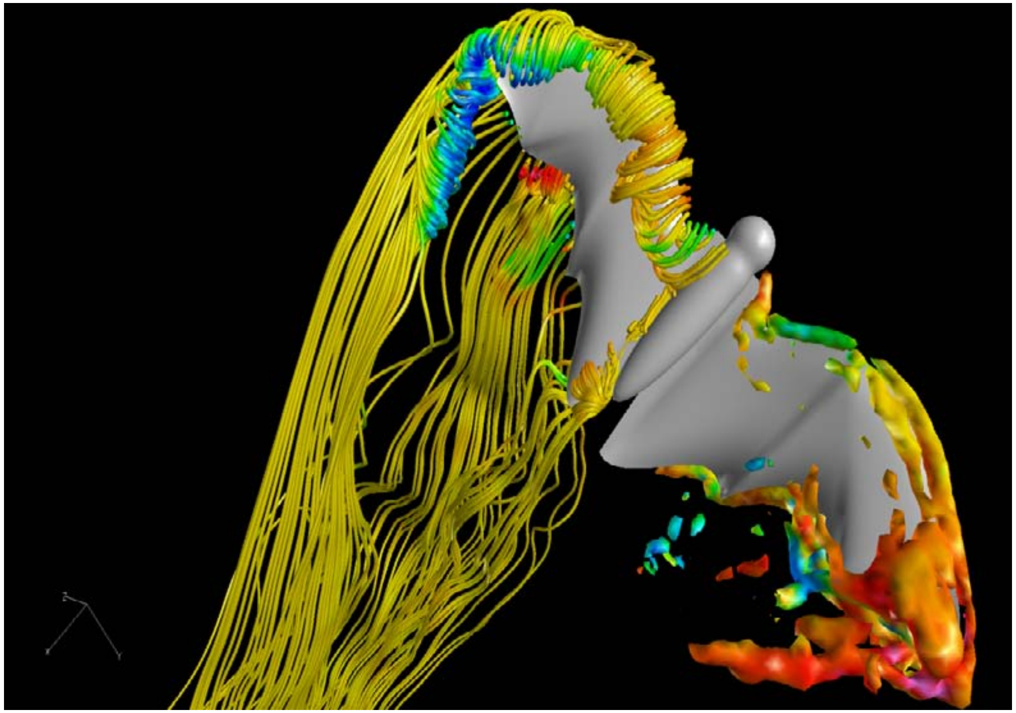
⇨ Nonlinear instabilities ⇨ Turbulence transition

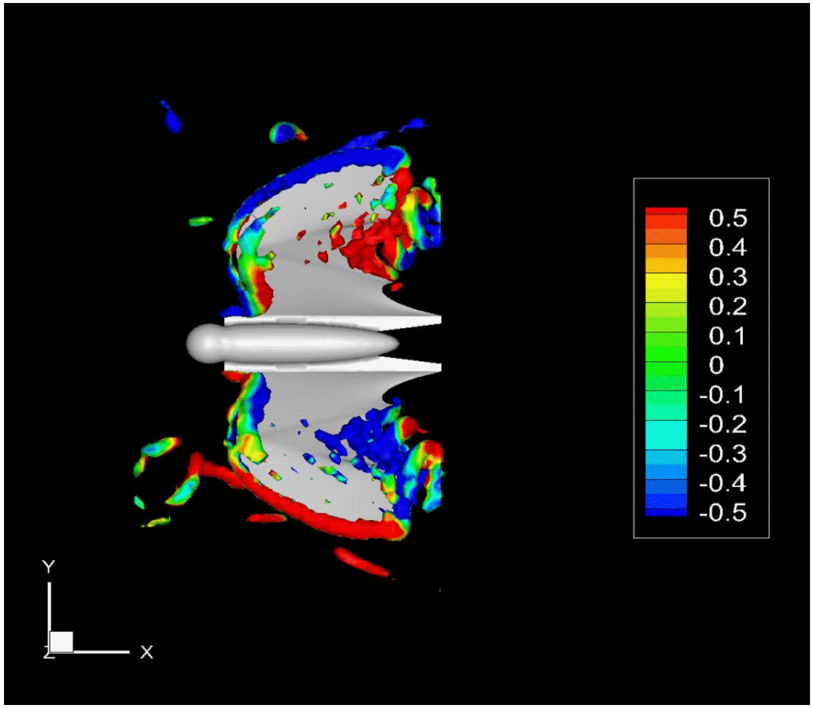
- 动边界的NS方程：移动边界问题
  - 动边界的边界层方程：加速边界层
  - 流固耦合问题：浸入边界方法



LEV on bat wing at downstroke

- Attached LEV is observed on both wings but the two LEVs are not connected
- LEV merges with tip-vortex at the wing-tip and connects to the root-vortex at the wing-base.





The streamlines and vortex structures around the wing during the down-stroke when the wing is horizontal (top view for flight speed 1m/s).

The vortex structures are identified using the Q-criterion and colored by the stream-wise vorticity.

3(+1)个数学问题

- 边界层方程：加速，曲面 → 生物推进， 潜艇，航空器
- 大涡模拟方程的收敛性：Camassa-Holm 方程

  下一代计算流体力学软件的主要工具
- 能量耗散率的收敛性： $\lim_{\nu->0}\left\langle \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\rangle=$常数

  Kolmogorov统计理论，NS方程解的存在唯一性

结束语

- 湍流:一个领域 – 重要进展

  不是一个单独的问题

- NS方程：形式简洁，普适特性

  数学，物理， 计算机， 力学

- 时空尺度耦合：湍流普适特性的核心问题

  湍流噪声，发动机燃烧