K 等價與代數閉鏈
K equivalence and algebraic cycles

王金龍
Chin-Lung Wang
台灣大學

於中科院數學所, 北京

3 月 2 日, 2016

摘要

K 等價關係是從雙有理幾何學極小模型的不唯一性所自然引發的一個基本概念. 這個等價關係是如此自然而簡單, 使得他在許多不同的幾何分支都產生連結.

這個報告將先簡單回顧二十年來一些奠基於各種積分理論的初步數值結果, 然後將談到最近利用 peverse sheaf 分解定理以及弧線空間的幾何所得到的一些新的幾何進展, 包含周 motive 等價性問題與代數閉鏈的存在性問題.

雙有理幾何簡史

K 等價與上同調

換變數公式與複橢圓虧格

K 等價猜想

弧線空間

Semi-small K 等價與 motives

代數曲面的極小模型

如果兩個不可化約 (irreducible) 的代數曲體 (algebraic varieties) 共有一個同構的 Zariski 開集, 則稱他們爲雙有理同構 (或等價, birational). 這等同於他們有同構的有理函數體.

定理 1 (Castelnuovo)

令 X 爲光滑代數曲面, $C \subset X$ 爲一不可化約曲線. 則, 存在一個雙有理映射 $\phi : X \to \bar{X}$ 將且僅將曲線 C 收縮而得到一個光滑曲面 $\bar{X}$ 的充分必要條件爲 C 是一個 (-1) 曲線. 即,

$$C \cong P^1 \quad \text{且} \quad C^2 = -1.$$

定義 2 (極小 (minimal) 曲面)

我們稱一個光滑曲面爲極小曲面如果他不包含任何 (-1) 曲線.

定義 3 (Kodaira (小平邦彥) 維度)

一個緊緻光滑代數流形 X 的 Kodaira 維度 $\kappa(X)$ 定義爲

$$\kappa(X) = \lim_{\ell\to\infty} \dim \operatorname{Im}\left[\Phi_\ell : X \dashrightarrow \mathbf{P}\big(H^0(X, K_X^{\otimes \ell})\big)\right],$$

其中 $K_X = \Omega_X^{\dim X}$ 爲 X 的典型線叢.

定理 4 (Enrique)

每一個曲面 X 都有雙有理極小模型. 如果 $\kappa(X) \neq -\infty$, 則極小模型具有唯一性. 更進一步地, $\kappa(X) = -\infty$ 的充分必要條件是 X 雙有理同構於某一個直紋面 (ruled surface). 即

$$X \overset{\sim}{\dashrightarrow} C \times \mathbf{P}^1.$$

Mori (森) 理論: 極小模型綱領 MMP

定義 5 (Reid, 1970 末期)

我們稱一個正則 (normal) 代數曲體 X 僅有**終端 (terminal) 奇點** 如果 (i) K_X 是 $\mathbf{Q}$-Cartier, (ii) 存在一個 (對於所有) 奇點的化解 $\phi : Y \to X$ 使得 $K_Y =_{\mathbf{Q}} \phi^* K_X + \sum a_i E_i$ 並且 $a_i > 0$. 其中 $\{E_i\}$ 是所有的 ϕ-特殊除子.

差異除子 $E = \sum a_i E_i = K_{Y/X} = \operatorname{div} J(\phi)$ 亦稱為 Jacobian 除子.

定理 6 (Mori, Kawamata, Shokurov, 1980 年代)

給定 terminal 代數曲體 X. 如果 K_X 與所有曲線相交非 nef, 則每一個**極端邊線** (extremal ray) $R \in \overline{NE(X)}_{K<0}$ 可由一個有理曲線 C 生成. 並且 R 的支援除子 D 定義了一個**極端映射** $\psi_R : X \to \bar{X}$:

$$\psi_R(C') = pt \iff [C'] \in R.$$

MMP. 記 $n = \dim X$, 則 $\bar{X}$ 具有三種可能:

1. $\dim \bar{X} < n$: 即 $X \to \bar{X}$ 爲纖維叢 (fiber space).
2. ψ_R 爲 **divisorial**: $\dim \mathrm{Exc}(\phi_R) = n - 1$. 這時 $\bar{X}$ 仍然僅有 terminal 奇點. MMP 可以繼續.
3. ψ_R 爲 **small**: $\dim \mathrm{Exc}(\phi_R) < n - 1$. 這時 $\bar{X}$ 的奇點過於複雜, 非 $\mathbf{Q}$-Gorenstein!

定義 7 (極小模型)

我們稱一個代數曲體 X 爲一個 **minimal model** 倘若 X 僅有 terminal 奇點, 並且 K_X 是 nef.

註解 (Log MMP)

以上的討論可推廣到 log 範疇. 即考慮 (X, D) 並以 $K_X + D$ 取代 K_X, 其中 $D = \sum d_i D_i$, $d_i \in \mathbf{R}$ 視爲一個“邊界除子”.

翻轉手術: Flips/flops

定義 8 (Log-flips)
給定一個 small $K_X + D$ log-extremal 收縮映射 $\psi : X \to \bar{X}$. 則 $K_X + D$ **log-flip** 代表一個圖表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X^+ \arrow[dl, "\psi^+"] \\ & \bar{X} & \end{tikzcd}$$

其中 f 在某個餘維 ≥ 2 的 Zariski 開集上同構, 並且 $K_{X^+} + D^+$ 是 ψ^+ ample. $D = 0$ 稱爲 **flip**. 若 K_X 是 ψ-trivial 則亦稱爲 D-**flop**.

定理 9 (Mori 1988)
3 維 flips 存在. 因此極小模型可用 MMP 造出, 但沒有唯一性.

3 維的特殊性

定理 10 (Shokurov 1984)

3 維 flips (以及 log-flips) 在有限步驟之後不會再出現.

定理 11 (Reid, Mori)

3 維 terminal 奇點的局部解析結構均爲形如 cDV$/\mu_r$ 的孤立奇點. 其中 cDV 代表 $\{(x,y,z,t) \in \mathbf{C}^4 \mid f(x,y,z) + tg(x,y,z,t) = 0\}$, 而 f 是一個 ADE 多項式. r 代表奇點的 Gorenstein 指標 (使得 $K^{\otimes r}$ 得以擴張爲一線叢). 並且 (f,g,r) 具有完整的分類.

定理 12 (Kollár 1988, Kollár–Mori 1992)

3 維翻轉手術 flips 以及 flops 可以 (i) 有效分類, (ii) 在代數族 (algebraic families) 之下一致地進行, 並且 (iii) 相異的 3 維雙有理 $\mathbf{Q}$-factorial 極小模型均可以透過一串有限步驟的 flops 來連結.

3 維 MMP 理論摘要

∞. MMP 成功運作, 並給出 **Q**-factorial 極小模型.

3. 極小模型不唯一, 但是任兩個 **Q**-factorial 極小模型 X 及 X', 期間的雙有理映射均可分解爲一個有限的 flops 序列. 並且, flops 可以被完全分類.

2. 局部模空間具有經典的同構 $Def(X) \cong Def(X')$.

1. 上同調群 $H^*(X) \cong H^*(X')$ 及相交上同調 $IH^*(X) \cong IH^*(X')$ 具有保持混合 (單純) Hodge 結構的經典同構.

0. X' 與 X 擁有相同的奇點結構.

注意到, "**1**" 裡的拓樸乘法結構並不保持. 在 flop 之下, 一維閉鏈的有效性 (effectivity) 也不保持: 對於極端有理曲線 C 與 C', 有

$$C \mapsto -C'.$$

更高維度的進展

“0” 本質上就是錯的. 奇點也無法分類.

”∞” 似乎是無窮地困難. 但是 **“1”**, **“2”** and **“3”** 並不依賴於他.

註解 (傳統 vs 新型的 MMP)

- Hacon 與 McKernann 在 2005 證明了 (log-)flips 的存在性, 因此 ”∞” 化約成了 flips 的終結 (termination) 猜想.
- BCHM 在 2010 證明了 $\kappa(K+D)=\dim X$ 時極小模型的存在性. 證明依賴於 Shokurov 所開啓的 MMP with scaling. 一般的情形化約至非消沒 (non-vanishing) 猜想.
- 利用 BCHM, Kawamata 證明了 ”**3**” 的分解敘述. 但是 “**2**” 在 3 維的結論至今仍然無法從 “**3**” 在 4 維的分解定理導出, 或得到化簡. 3 維 flops 的分類仍是關鍵.

K 等價關係

定義 13

兩個 **Q**-Gorenstein 曲體 X 與 X' 在以下狀況下稱作 K 等價, 並記爲 $X =_K X'$: 存在代數流形 Y 以及雙有理映射 ϕ, ϕ':

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi'"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$$

使得 $\phi^* K_X = \phi'^* K_{X'}$. 換言之, 在 $K_Y = \phi^* K_X + E = \phi'^* K_{X'} + E'$ 中我們有相同的 Jacobian 除子 $E = E''$.

定理 14

如果 X 與 X' 是雙有理的 terminal 曲體, 並且 K_X 與 $K_{X'}$ 沿著他們的差異軌跡 (exceptional loci) 均爲 nef, 則 $X =_K X'$.

一個啓發式的幾何論點, 始於 1995

對於光滑流形, K 等價等同於 c_1 (第一陳省身類) 等價. 給定 X 上的 Kähler 形式 ω 與 X' 上的 ω', 這表示存在 $f \in C^\infty(Y)$ 使得

$$-\partial\bar{\partial}\log(\phi^*\omega)^n = -\partial\bar{\partial}\log(\phi'^*\omega')^n + \partial\bar{\partial}f.$$

即, $\phi^*\omega$ 與 $\phi'^*\omega'$ 這兩個 Y 上的退化度量具有"擬等價"的體積元

$$\phi'^*\omega'^n = e^f \times \phi^*\omega^n.$$

注意到 $\phi^*\omega$ 與 $\phi'^*\omega'$ 的退化方向並不相同.

問題 (L^2 上同調的解析對應)

在保持退化體積元的擬等價類不變之下, 是否能夠通過一族退化的黎曼或 Kähler 度量將 $\phi^*\omega$ 旋轉至 $\phi'^*\omega'$? 例如從丘成桐關於退化的 Monge–Ampère 方程的結果出發?

p-adic 積分與 Betti/Hodge 數, 1997

- K 等價既然是一種體積等價性, 我們當然也可以考慮非阿基米德的體積概念. 最簡易的就是 p 進位數的積分.
- 因 X 與 X' 都是射影流形 (projective manifolds), 如同在算數幾何裏, 可以取得整個 K 等價定義中所涉及的每個物件的整數模型, 如 $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} S$. 在有限生成環 $S \subset \mathbf{C}$ 裡, 對於幾乎所有的質理想 $P \lhd S$ 而言我們都會取得模 P 下的 good reduction. 這時取 S 在 P 的完備化爲 $R = \hat{S}_P$.
- 取 X_R 的 Zariski 開集覆蓋 $\{U_i\}$ 使得 $K_{X_R}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}\Omega_i$. 則對於每一個緊緻開集 $S \subset U_i(R) \subset X(R)$ 我們定義 S 的測度爲

$$m_{X_R}(S) \equiv \int_S d\mu_{X_R} := \int_S |\Omega_i|_p$$

其中 $R/P \cong \mathbf{F}_q$, 而 $q = p^r$. 這個定義與 Ω_i 的選擇無關.

根據 p-adic 積分的換變數公式以及 $X =_K X'$, 我們立刻就推得

$$m_X(X(R)) = \int_{Y(R)} |J(\phi)|_p \, d\mu_{Y_R} = \int_{Y(R)} |J(\phi')|_p \, d\mu_{Y_R} = m_{X'}(X'(R)).$$

再根據 Weil 的基本公式 ($\mathbf{A}^n(\mathbf{Z}_p)$ 總測度爲 1)

$$m_X(X(R)) = \frac{|\bar{X}(\mathbf{F}_q)|}{q^n},$$

我們推得 X 與 X' 具有相同的局部 Zeta 因子. 根據 Weil 猜想 (Deligne) 這就得到 $h^i(X) = h^i(X')$. 如果進一步考慮幾乎所有的 P, 則根據 Galois 表示論理的 Chebotarov 密度理論以及 p-adic Hodge 理論 (Fontaine–Messing, Faltings) 我們就推出

$$h^{p,q}(X) = h^{p.q}(X').$$

(Batyrev, 王, Ito.)

曲率積分 (陳-示性數), 複虧格與共邊理論

- 考慮緊緻近複流形以及之間的複共邊 (complex cobordism) 等價關係. 其等價類 Ω^U 形成複共邊環. 給定交換環 R, 我們稱一個環同態 $\varphi : \Omega^U \to R$ 爲一個 R-虧格 (genus).
- Hirzebruch: φ 可以透過一個首 1 冪級數 $Q(x) \in R[\![x]\!]$ 決定. 令 $c(T_X) = \prod_i (1 + x_i)$ 爲形式上的陳類根式分解. 則

$$\varphi(X) := \int_X K_\varphi(c(T_X)) \equiv \int_X \prod_i Q(x_i).$$

(重新寫回對稱多項式 c_i's 的多項式.)
- 陳–Weil 理論説明了 $K_\varphi(c(T_X))$ 是曲率微分形式的等價寫法. 其積分所得到的幾何量 (**Q**-虧格) 正是所謂的陳-示性數.

- 記 $f(x) = x/Q(x) = x + \cdots$ 爲可逆的冪級數.
- 著名的複橢圓虧格 φ_{ceg} 對應於 4 個參數的

$$f(x) = e^{(k+\zeta(z))x} \frac{\sigma(x)\sigma(z)}{\sigma(x+z)},$$

  其中 σ, ζ 爲對應於某一個橢圓曲線的 Weierstrass 橢圓函數.
- 此爲 Hermite–Halphen 的"根形式" (primitive form 1888).

問題

何時可以將微分式 $d\mu_X := K_\varphi(c(T_X))$ 視爲一種測度? 顯然這樣的 φ 在 K 等價之下具有不變性.

定理 15 (換變數公式, 王 2000)

(i) 令 $\varphi = \varphi_{ceg}$. 對於 X 裡的任何代數閉鏈 D 以及雙有理映射 $\phi: Y \to X$, $K_Y = \phi^* K_X + \sum e_i E_i$, 我們有

$$\int_D K_\varphi(c(T_X)) = \int_{\phi^* D} \prod_i A(E_i, e_i + 1)\, K_\varphi(c(T_Y)).$$

其中的 Jacobian 因子定義爲

$$A(t, r) = e^{-(r-1)(k+\zeta(z))t} \frac{\sigma(t+rz)\sigma(z)}{\sigma(t+z)\sigma(rz)}.$$

(ii) φ_{ceg} 給出所有存在換變數公式的虧格 (陳-示性數).

對於實橢圓虧格 ($k = 0$), Libgober–Borisov 也證明了 (i).

證明的想法 - 留數定理

- 給定光滑 blow-up $\phi : Y = \mathrm{Bl}_Z X \to X$, 其中 $Z \hookrightarrow X$ 爲餘維 r 的光滑代數子流形. 令 $E \hookrightarrow Y$ 爲 ϕ-差異除子.
- 則對於 X 裏的代數閉鏈 D, 以及冪級數 $A(t) \in R[\![t]\!]$, 都有

$$\begin{aligned}\int_{\phi^* D} A(E)\, K_Q(c(T_Y)) &= \int_D A(0)\, K_Q(c(T_X)) \\ &\quad + \int_{Z.D} \operatorname{Res}_{t=0}\Big(\frac{A(t)}{f(t)\prod_{i=1}^r f(n_i - t)}\Big)\, K_Q(c(T_Z)).\end{aligned}$$

  其中 $c(N_{Z/X}) = \prod_{i=1}^r (1 + n_i)$.
- 因此, 換變數公式等同於留數的積分項必須是 0. 這給出了 (f, A) 代數形式的函數方程式 (functional equation).
- 最後可以化約爲常微分方程式, 並以橢圓函數求解.

K 等價猜想, ICCM 2001

給定 K 等價映射 $f : X \dashrightarrow X'$, $\pi : X \times X' \to X$, $\pi' : X \times X' \to X'$.

I. (自然同構) 存在代數閉鏈 $T = \bar{\Gamma}_f + \sum_i T_i \in A^n(X \times X')$ 使得

$$T_* : H(X) \cong H(X'),$$

其中 $\pi_* T_i = 0 = \pi'_* T_i$, H 代表 Chow (周煒良) motive.

II. (A 模型同構) T 誘導出 Gromov–Witten 理論在 Kähler 模空間下的解析延拓不變性. (最早由阮勇斌提出.)

III. (B 模型同構) T 誘導出複代數結構模空間的 (至少局部) 同構.

IV. (弱分解)* 在維持辛結構的"適當"擬複結構擾動之下, f 可以分解成 ordinary $\mathbf{P}^r$ flops 的合成.

3 維時, Kollár–Mori 1992 $\Rightarrow$ I, III, IV, 李安明–阮勇斌 2000 $\Rightarrow$ II.

Ordinary $\mathbf{P}^r$ flop 的定義

給定 K_X-trivial 極端收縮 $(\psi, \bar{\psi}') : (X, Z) \to (\bar{X}, S)$, 假定

(i) $\bar{\psi} : Z = P(F) \to S$ 其中 $F \to S$ 是秩 $r+1$ 的向量叢,

(ii) $N_{Z/X}|_{Z_s} \cong \mathscr{O}_{P^r}(-1)^{\oplus(r+1)}, s \in S$,

則有秩 $r+1$ 向量叢 $F' \to S$ 使得 $N_{Z/X} \cong \mathscr{O}_{P(F)}(-1) \otimes \bar{\psi}^* F'$. 且 $\phi : Y := \mathrm{Bl}_Z X \to X$ 有差異除子 $E = P(F) \times_S P(F')$. 沿著另一方向收縮 E 得到$\phi' : Y \to X'$. $f : X \dashrightarrow X'$ 即爲 ordinary P^r flop.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dl, "\bar{\phi}"'] \arrow[dr, "\bar{\phi}'"] & Y \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi'"] & \\
Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\bar{\psi}"'] & X \arrow[dr, "\psi"] & Z' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dl, "\bar{\psi}'"'] & X' \arrow[dl, "\psi'"] \\
 & S \arrow[r, hook, "j'"] & \overline{X} &
\end{tikzcd}$$

如果 $S = \mathrm{pt}$, 則稱 f 爲 simple flop.

高維度空間關於 IV 的早期證據

- 令 $I_1 \lhd \Omega^U$ 爲所有 $[X]-[X']$ 生成的理想, 其中 $X \dashrightarrow X'$ 是一個 $\mathbf{P}^1$ (Atiyah) flop. Totaro 2000 證明了

$$\varphi_{ceg} = \varphi_1 : \Omega^U \to \Omega^U / I_1.$$

- 令 $I_K \lhd \Omega^U$ 爲 $[X]-[X']$ 生成的理想, 其中 $X =_K X'$. 顯然 $I_1 < I_K$. 但是從換變數公式我們知道

$$\varphi_{ceg}(X) = \varphi_{ceg}(X'),$$

因此 $I_K = I_1$. 即, 在 Ω^U 裏, K 等價可分解成 $\mathbf{P}^1$ flops 的合成.

- IV 未考慮 Mukai flops 是因爲 Huybrechts 在 hyperKähler 的“擾動同構”定理蘊含了他們在 deformation 下變成同構.

高維度空間 I 與 II 在特殊 flops 下的證據

- 關於 I, II, 我與林惠雯, 李元斌 (LLW 團隊, 2005-2014) 證明了在 ordinary flops 之下, $T = \bar{\Gamma}_f$ 誘導出 周-motive 的同構, 以及量子環 (虧格 0 的 GW 理論) 同構

$$T_* : QH(X) \cong QH(X').$$

- 其中, 極端邊線的虧格爲零, 3 點 Gromov–Witten 不變量給出了拓樸乘法結構 (cup product) 的修正項.
- 對於 simple flops, Iwao 與 LLW 2013 證明了所有虧格的 GW 理論在 T_* 之下的解析延拓等價性.
- 關於 I, 我與付保華 2008 在 stratified Mukai flops 之下證明了 $T = [X \times_{\bar{X}} X']$ 給出 周-motive 同構. (推廣 LLW 在 Mukai flops 下的結果.) 這給出 I 裏 $\sum_i T_i \neq 0$ 的主要範例.

Nash 的弧線空間與換變數

定義 16 (Nash's arc space 1967)

給定代數曲體 X, 我們有以下 projective 系列的代數曲體:

$$\pi_m : X_m := Mor(\operatorname{Spec} \mathbf{C}[t]/t^{m+1}, X) \to X, \quad m \in \mathbf{N}.$$

當 X 爲光滑時, π_m 是一個局部平凡的 $\mathbf{A}^{mn}$ 纖維叢.

- Nash 的原始想法是希望用 $X_\infty = \lim_m X_m$ 的整體幾何給出奇點化解的另一種方法 (看法).
- 對於雙有理映射 $\varphi : Y \to X$, 自然有 $\varphi_m : Y_m \to X_m$.
- 當 Y, X 均爲光滑時, φ_m 的結構可以從 Jacobian 除子 $E = K_{Y/X} \subset Y$ (較容易) 讀出.
- 對於 $k \in \mathbf{N}$, 令 $Y_m^k = \{\gamma \in Y_m \mid (\operatorname{ord}_t E)(\gamma) = k\}$.

隱函數定理 (或 Hensel's 引理) 可以推出:

定理 17 (換變數的幾何形式 Denef–Loeser 1997)

給定 k, 對於任何 $m \geq 2k$ 我們有

(i) Y_m^k 是由 φ_m 的部分纖維所組成, 並且

(ii) $Y_m^k \to \varphi_m(Y_m^k) \subset X_m$ 是一個局部平凡的 $\mathbf{A}^k$ 纖維叢.

註解

在 Kontsevich 的建議下, Denef–Loeser 使用弧線空間建立了取值在 Grothendieck 群 $K(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbf{L}^{-1}]$ 的完備化上的 (非阿基米德) motivic 測度與積分. 其中 $\mathbf{L} = [\mathbf{A}^1]$.

其行爲與 p-adic 測度與積分類似. 通過 Deligne 的混合 Hodge 理論也可以推出 K 等價時 $h^{p,q}$ 的不變性.

這裡, 我們希望回到 Nash 的建議, 直接使用 X_m 的幾何結構.

Semi-small K 等價

在 n 維代數曲體中, 考慮以下形式的 K 等價 (例如 flops)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X' \arrow[dl, "\psi'"] \\ & \bar{X} & \end{tikzcd}$$

其中 ψ 與 ψ' 均爲 semi-small 映射. 即

$$\dim X \times_{\bar{X}} X = n = \dim X' \times_{\bar{X}} X'.$$

給定奇異曲體 $\bar{X}$ 一個由代數子流形所構成的 Whitney 分層 (stratification) $\mathscr{T}$. 對於其中一層 $T \in \mathscr{T}$, 我們稱他是 "ψ-相關" 的條件爲:

$$\dim \psi^{-1}(T) \times_T \psi^{-1}(T) = n.$$

劉士瑋在他 2016 的台大學士論文證明了以下敘述:

性質 18

給定 K 等價 $f : X \dashrightarrow X'$ 以及 $(\psi, \psi') : X \times X' \to \bar{X}$ 如前述, 但只假設 ψ 爲 semi-small. 如果分層 $\mathscr{T}$ 取得足夠細緻, 則

(i) $T \in \mathscr{T}$ 是 ψ-相關層 $\Longrightarrow T$ 也是 ψ'-相關層.

(ii) ψ' 也是 semi-small.

(iii) $\dim X \times_{\bar{X}} X' = n$.

定理 19

在 $\bar{X}$ 上存在足夠細緻的分層 $\mathscr{T}$. 使得, 對於任何一個相關層 $T \in \mathscr{T}$, 如果 $\dim T = d$ 則

$$R^{n-d}\psi_* \mathbf{Z}_{\psi^{-1}(T)} \cong R^{n-d}\psi'_* \mathbf{Z}_{\psi'^{-1}(T)}.$$

- 證明的基本想法是利用 X 與 X' 上的弧線空間. 考慮投影

$$\pi_{m,T} : X_m \,|_{\psi^{-1}(T)} \longrightarrow \psi^{-1}(T).$$

從 $X_m \to X$ 的 $\mathbf{A}^{mn}$ 纖維結構很容易看出 $\pi_{m,T}$ 建立了不可化約分量的 1-1 對應, 並且 $R(\pi_{m,T})_!\mathbb{Z}[2mn] \cong \mathbb{Z}$.
- 考慮 $X \leftarrow Y \to X'$, 並對 $Y_m \to Y, X'_m \to X'$ 做類似的理解.

證明的關鍵是利用

(i) semi-small 條件
(ii) 弧線空間換變數定理的幾何形式
(iii) Leray 譜序列

去與 $X_m \leftarrow Y_m \to X'_m$ 做精細的維度比較.

利用 peverse sheaf 的分解定理

推論 20

令 $\iota_T : T \hookrightarrow \bar{X}$ 爲該層的嵌入映射. 透過根底的轉換 (base change), 我們推得 T 上局部系統 (local system) 的同構:

$$R^{n-d}\iota_T^! \psi_* \mathbf{Z}_X \cong R^{n-d}\iota_T^! \psi'_* \mathbf{Z}_{X'}.$$

這個推論可以被應用在 semi-small 映射的具體分解定理中 (BBD 1980, Borho–MacPherson 1983, Cataldo–Migliorini 2004):

$$R\psi_*\mathbf{Q}[n] \cong \bigoplus_{T\in\mathscr{T}} \mathbf{IC}(T, R^{n-\dim T}\psi_*\mathbf{Q}).$$

我們省略 **IC** (intersection complex) 以及 perverse sheaf 的定義.
綜合以上, 我們得到 $R\psi_*\mathbf{Q} \cong R\psi'_*\mathbf{Q}$.

代數閉鏈型的 Kunneth 公式

假設 Λ 是一個 Noether 環. 對於 $\bar{X}$ 裏的開集合 U, 我們有以下 Borel–Moore 同調的 Kunneth 公式 (Chriss–Ginzburg 1997)

$$Hom_{D^b_c(U,\Lambda)}(\psi_*\Lambda, \psi'_*\Lambda) \cong H^{BM}_{2n}(\psi^{-1}(U) \times_U \psi'^{-1}(U); \Lambda).$$

再利用 Cataldo–Migliorini 2004 的方法, 可以證明

引理 21 (關鍵引理)

在 semi-small K 等價之下, 任何同構 $\psi_*\Lambda[n] \cong \psi'_*\Lambda[n]$ 都誘導自一個以 Λ 爲係數的代數閉鏈的同調類 $\Gamma \in H^{BM}_{2n}(X \times_{\bar{X}} X'; \Lambda)$.

定理 22 (劉 2015)

Semi-small K 等價的 X 與 X' 有相同的 $\mathbf{Q}$-周 motive.

這還沒回答 $H^i(X;\mathbf{Z})$ 中 torsion 子群的部分. 事實上, peverse sheaf 分解定理在係數為 $\mathbf{Z}$ 是有反例的.
運用更細緻的 peverse sheaf 的黏貼過程, 可以證明

定理 23 (劉 2016)

對於任何 Noetherian local ring Λ, semi-small K 等價都有

$$R\psi_*\Lambda[n] \cong R\psi'_*\Lambda[n].$$

因此 X 與 X' 有相同的 Λ-周 motive.

雖然這個代數閉鏈 $T_\Lambda \in A^n(X \times X') \otimes \Lambda$ 目前還無法確定其具體的形式 (猜測是 $[X \times_{\bar{X}} X']$), 但是考慮所有 $\Lambda = \mathbf{Z}_p$ 已經足以證明

$$H^*(X;\mathbf{Z}) \cong H^*(X';\mathbf{Z}).$$

這是之前的數值積分方法所未能回答的!

謝謝您的參加與凝聽!