高维仿射李代数：从单位圆谈起

郜 云

York University

报告提纲

§1. 背景介绍.

背景介绍

- Kac-Moody 李代数及其量子化在过去三四十多年里推动了现代数学，尤其是代数学的发展。
- 仿射 Kac-Moody 李代数是从单位圆到有限维单李代数的多项式映射的中心扩张。
- 将单位圆换成环面，就得到环面李代数。
- 高维仿射李代数正是环面李代数的更一般的推广。

背景介绍

1990 年物理学家 Høegh-Krohn 和 Torrésani 用公理化体系引入了复数域上与高维共形场理论有关的一类李代数。这类李代数是由非退化不变对称双线性型、有限维的 Cartan 子代数、离散的不可约根系以及非迷向根对应的 ad-幂零根空间所刻画，他们称之为拟单李代数。

背景介绍

- 复数域上的有限维单李代数、仿射 Kac-Moody 李代数以及环面李代数都是拟单李代数。

Kac 猜想

数学家 Victor Kac 猜测，与有限维单李代数和仿射 Kac-Moody 李代数类似，所有拟单李代数的根系对应的对称双线性型在所有根张成的实线性空间上是半正定的。

背景介绍

为了完善拟单李代数的数学理论基础，1997 年 Allison，Azam，Berman，G 以及 Pianzola 用半格和有限维李代数的根系给出了这类李代数根系的完整刻画。同时，我们证明了 Kac 猜想，将拟单李代数更名为高维仿射李代数。

背景介绍

- 拟单李代数的根系恰好是 Saito 在研究奇异理论时引进的高维仿射根系。
- 高维仿射李代数还与代数几何学家 Slodowy 的相交矩阵李代数，及 Berman-Moody 和 Benkart-Zelmanov 等学者研究的根系分次李代数有紧密的联系。

背景介绍

关于高维仿射李代数具体有下述问题：

- 分类并彻底揭示高维仿射李代数的结构；
- 用数学或数学物理等方法构造这些李代数的实现，也就是表示理论；
- 高维仿射李代数的量子化，以及在数学物理上的应用。

背景介绍

高维仿李代数分类涉及到很多其它数学分支：

- 广义 Cayley 代数；
- 若当代数；
- 凯勒微分；
- 非交换几何（量子空间，Connes 的循环同调群）。

高维仿李代数的分类给沉寂了多年的经典非结合代数注入了一股新的活力。

背景介绍

高维仿李代数的表示论跟高维共形场理论紧密相联：

- Moody-Rao-Yokonuma，Frenkel，Yamada 等人构造了环面李代数的顶点算子表示；
- Berman-G-Tan 等人构造了以量子环面为坐标代数的高维仿射李代数的顶点表示；
- G-Zeng 等人构造了一类高维仿射李代数的酉表示。

背景介绍

- Ginzburg-Kapranov-Vasserot 在研究代数曲面的 Langlands 互反律时对坐标代数是量子环面的 A 型高维仿射李代数进行了量子化，即所谓的量子环面代数；
- 量子环面代数同时包含了量子仿射代数的两种实现作为子代数；
- 量子环面代数与双仿射 Hecke 代数以及 MacDonald 猜测有关联。

§2. 高维仿射李代数与高维仿射根系.

高维仿射根系定义

$\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间，$(\,\cdot\,,\cdot\,)$ 是 $\mathcal{V}$ 上半正定对称双线性型，$R \subseteq \mathcal{V}$。令

$$R^{\times} = \{\alpha \in R \,\big|\, (\alpha,\alpha) \neq 0\}, \quad R^{0} = \{\alpha \in R \,\big|\, (\alpha,\alpha) = 0\}.$$

如果 R 满足如下公理则 R 称为 $\mathcal{V}$ 上的一个**高维仿射根系**：

(R1) $0 \in R$。

(R2) $-R = R$。

(R3) R 可以张成 $\mathcal{V}$。

(R4) 如果 $\alpha \in R^{\times}$, 则有 $2\alpha \notin R^{\times}$。

高维仿射根系定义 (Continue.)

(R5) R 在 $\mathcal{V}$ 中是离散的。

(R6) 如果 $\alpha \in R^{\times}$, $\beta \in R$, 则存在非负整数 $d, u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap R = \{\beta - d\alpha, \ldots, \beta + u\alpha\},$$

并且 $d - u = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$。

(R7) 如果 $R^{\times}$ 有无交并分解 $R^{\times} = R_1 \biguplus R_2$ 并且 $(R_1, R_2) = 0$, 则有 $R_1 = \emptyset$ 或者 $R_2 = \emptyset$, 也就是 $R^{\times}$ 是不可约的。

(R8) 对任意 $\sigma \in R^0$, 存在 $\alpha \in R^{\times}$ 使得 $\alpha + \sigma \in R$。

高维仿射李代数定义

$\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的李代数，并且 $\mathcal{L}$ 满足

(EA1) $\mathcal{L}$ 上有一个非退化不变对称双线性型 $(\cdot,\cdot):\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathbb{C}$。

(EA2) $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}$ 是一个 Cartan 子代数：$\mathcal{H}=C_{\mathcal{L}}(\mathcal{H})$ 并且 $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}h$ 都是可对角化的。

$\mathcal{L}$ 有根子空间分解

$$\mathcal{L}=\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{H}^*}\mathcal{L}_\alpha=\mathcal{H}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{H}^*\setminus\{0\}}\mathcal{L}_\alpha.$$

$\mathcal{L}$ 的根系 $R=\{\alpha\in\mathcal{H}^*\,\big|\,\mathcal{L}_\alpha\neq 0\}$, $(\cdot,\cdot)$ 诱导了 $\mathcal{H}^*$ 上的双线性型。

高维仿射李代数定义 (Continue.)

类似的定义 $R^\times$ 和 R^0。

(EA3) 对 $\alpha \in R^\times$ 以及 $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$, 有 $\mathrm{ad} x_\alpha$ 局部幂零的作用在 $\mathcal{L}$ 上。

(EA4) 根系 R 是 $\mathcal{H}^*$ 的一个离散子集。

(EA5) 根系 R 是不可约的，并且对 $\sigma \in R^0$, 存在 $\alpha \in R^\times$ 使得 $\alpha + \sigma \in R$。

定义

$\mathcal{L}$ 如果满足 (EA1)-(EA5)，则三元组 $(\mathcal{L}, (\cdot,\cdot), \mathcal{H})$ 称为一个高维仿射李代数。

注记

- 有限维单李代数以及仿射 Kac-Moody 李代数都是高维仿射李代数；
- 不定型的 Kac-Moody 李代数由于不满足 (EA3)，不是高维仿射李代数；

根系 R 的一些性质

命题 (AABGP)

设 $\mathcal{L}$ 满足 (EA1)-(EA3)，并且 $\alpha \in R^{\times}$。则有：

(a) 对任意 $\beta \in R$, 有 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$。

(b) 定义 $\omega_\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^*)$：$\omega_\alpha(\varphi) \triangleq \varphi - \frac{2(\varphi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$。则有 $\omega_\alpha(R) = R$。

(c) $k\alpha \in R$, 则 $k = 0, \pm 1$。

(d) $\dim \mathcal{L}_\alpha = 1$。

(e) 任意 $\beta \in R$, 存在非负整数 u, d, 使得 $\beta + n\alpha \in R$ 当且仅当 $-d \leq n \leq u$。特别地，$d - u = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$。

Kac 猜想

令 $\mathcal{V}$ 是由 R 张成的实线性空间，则 $\mathcal{L}$ 的双线性型自然诱导了 $\mathcal{V}$ 上的实对称双线性型。在 [AABGP] 中，我们证明了

定理 (AABGP)

双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 在实线性空间 $\mathcal{V}$ 上是半正定的。

由 Kac 猜想立即有：

定理

设 $\mathcal{L}$ 是一个高维仿射李代数，R 为 $\mathcal{L}$ 对应的根系。则 R 是 $\mathcal{V}$ 上的一个高维仿射根系。

§3. 高维仿射李代数的分类.

高维仿射根系的结构

假设 R 是 $\mathcal{V}$ 中的高维仿射根系。令

$$\mathcal{V}^0 = \mathrm{rad}(\,\cdot\,,\cdot\,),$$

$\mathcal{V}^0$ 的维数称为根系 R 的零度。记 $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\mathcal{V}^0$, $\bar{R}$ 为 R 的像。

定理 (Allison-Azam-Berman-G-Pianzola)

$\bar{R}$ 是空间 $\bar{\mathcal{V}}$ 的一个有限不可约根系（可能是非约化根系）。

高维仿射根系的结构

固定 $\bar{R}$ 的单根 $\bar{\Pi} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\}$, 取定 $\bar{\alpha}_i$ 在 R 中的原像 $\dot{\alpha}_i$, 令

$$\dot{\mathcal{V}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_l\}.$$

则有 $\mathcal{V} = \dot{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{V}^0$。记

$$\dot{R} = \{\dot{\alpha} \in \dot{\mathcal{V}} \,|\, \text{存在 } \sigma \in \mathcal{V}^0 \text{ 使得 } \dot{\alpha} + \sigma \in R\}.$$

从而 $\dot{R}$ 是 $\bar{R}$ 在 $\mathcal{V}$ 中的提升。记

$$\dot{R}^\times = \{\dot{\alpha} \in \dot{R} \,|\, \dot{\alpha} \neq 0\}, \; S_{\dot{\alpha}} = \{\sigma \in \mathcal{V}^0 \,|\, \dot{\alpha} + \sigma \in R\}.$$

则有

$$R = R^0 \cup \Big(\bigcup_{\dot{\alpha} \in \dot{R}^\times} (\dot{\alpha} + S_{\dot{\alpha}}) \Big).$$

高维仿射根系的结构

- $\dot{R}_{sh} \subseteq \dot{R}^{\times}$ 最小长度的根，即短根；
- $\dot{R}_{ex} \subseteq \dot{R}^{\times}$ 中长度是某个短根的 2 倍的根，即超长根；
- $\dot{R}_{lg} \subseteq \dot{R}^{\times}$ 中既不是短根又不是超长根的根，即长根。

重新标记 $S_{\dot{\alpha}}$：

$$S_{\dot{\alpha}} = \begin{cases} S, & \text{如果 } \dot{\alpha} \in \dot{R}_{sh}, \\ L, & \text{如果 } \dot{\alpha} \in \dot{R}_{lg} \neq \emptyset, \\ E, & \text{如果 } \dot{\alpha} \in \dot{R}_{ex} \neq \emptyset. \end{cases}$$

则

$$R = R^0 \cup \Big(\bigcup_{\dot{\alpha} \in \dot{R}_{sh}} (\dot{\alpha} + S) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\dot{\alpha} \in \dot{R}_{lg}} (\dot{\alpha} + L) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\dot{\alpha} \in \dot{R}_{ex}} (\dot{\alpha} + E) \Big).$$

高维仿射根系的结构

命题 (AABGP)

(a) S 是 $\mathcal{V}^0$ 中的半格。如果 R 的型是 A_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 3)$, D_l $(l \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 之一，则 S 是 $\mathcal{V}^0$ 中的格。

(b) 若 $\dot{R}_{lg} \neq \emptyset$, 则 L 是 $\mathcal{V}^0$ 中的一个半格。若 R 的型是 B_l $(l \geq 3)$, F_4, G_2, BC_L $(l \geq 3)$ 之一，则 L 是 $\mathcal{V}^0$ 中的格。

(c) 类似的，若 $\dot{R}_{ex} \neq \emptyset$, 则 E 是 $\mathcal{V}^0$ 中的一个 translated 半格使得 $E \cap 2S = \emptyset$。

高维仿射根系的结构

对于给定的有限不可约根系 $\dot{R}$, 和一些满足一定条件的格或者半格，[AABGP] 中给出了具体高维仿射根系的构造。综述结果有：

定理 (AABGP)

由一个 X 型有限不可约根系 $\dot{R}$ 以及至多三个半格或者 translated 半格，通过构造我们可以得到一个 X 型的高维仿射根系。反之，任何一个 X 型的高维仿射根系都同构与一个由有限不可约 X 型根系构造得到的根系。

根系分次李代数

定义 (Berman-Moody)

如果李代数 $\mathcal{L}$ 满足：

(i) $\mathcal{L}$ 包含一个有限维单李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\mu \in R^\times} \mathfrak{g}_\mu$, R 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的根系；

(ii) $\mathcal{L} = \bigoplus_{\mu \in R} \mathcal{L}_\mu$, 对于 $\mu \in R$ 子空间 $\mathcal{L}_\mu$ 如下定义：

$$\mathcal{L}_\mu = \{x \in \mathcal{L} \mid [h, x] = \mu(h)x, \text{ 对所有 } h \in \mathfrak{h} \text{ 成立}\};$$

(iii) $\mathcal{L}_0 = \sum_{\mu \in R^\times} [\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_{-\mu}]$。

则称 $\mathcal{L}$ 是一个约化根系 R 分次的根系分次李代数，其中子代数 $\mathfrak{g}$ 称为 $\mathcal{L}$ 的分次子代数。

A 型根系分次李代数

定义

两个完备李代数 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 称为中心同源的如果它们有同构的泛中心扩张。

关于 A 型根系分次李代数有如下例子：

例子

设 S 为 $\mathbb{C}$ 上含幺结合代数。$\mathfrak{gl}_n(S)$ 是系数在 S 上的一般线性李代数，导子代数为

$$\mathfrak{sl}_n(S) = [\mathfrak{gl}_n(S), \mathfrak{gl}_n(S)] = \langle E_{ij}(a) \,\big|\, a \in S,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

则 $\mathfrak{sl}_n(S)$ 是完备的，而且是一个 A_{n-1} 型根系分次李代数。

A 型根系分次李代数

定义

系数为 S 的 Steinberg 李代数 $\mathfrak{st}_n(S)$ 是由 $u_{ij}(a)$, $1 \le i \ne j \le n$, $a \in S$ 生成的李代数，并且对任意 $a, b \in \mathbb{C}$, $r, s \in S$ 满足：

- $u_{ij}(ar + bs) = au_{ij}(r) + bu_{ij}(s)$；
- 如果 i, j, k 两两不同，则有 $[u_{ij}(r), u_{jk}(s)] = u_{ik}(rs)$；
- 如果 $i \ne l$, $j \ne k$, 则 $[u_{ij}(r), u_{kl}(s)] = 0$

A 型根系分次李代数

记李代数满同态 $\varphi : \mathfrak{st}_n(S) \twoheadrightarrow \mathfrak{sl}_n(S)$, $u_{ij}(s) \mapsto E_{ij}(s)$。

定理 (Kassel, Kassel-Loday)

- 当 $n \geq 3$ 时，Steinberg 李代数 $\mathfrak{st}_n(S)$ 是完备的，并且 $(\mathfrak{st}_n(S), \varphi)$ 是 $\mathfrak{sl}_n(S)$ 的泛中心扩张。
- $\ker \varphi \cong \mathrm{HC}_1(S)$, 其中 $\mathrm{HC}_1(S)$ 是结合代数 S 的第一循环同调群（A.Connes)。
- 由李代数同调理论，我们有

$$\mathrm{H}_2(\mathfrak{st}_n(S)) = 0, \quad \mathrm{H}_2(\mathfrak{sl}_n(S)) \cong \mathrm{HC}_1(S).$$

A 型根系分次李代数

Berman 和 Moody 在 [BM] 中对 A_l $(l \geq 2)$ 型根系分次李代数在中心同源的基础上给出了分类：

定理 (Berman-Moody)

设 $\mathcal{L}$ 是一个根系 R 分次李代数。

(i) 如果 $R = A_2$, 则存在含单位元的交错代数 A 使得 $\mathcal{L}$ 与 $\mathfrak{st}_3(A)$ 是中心同源的。

(ii) 如果 $R = A_l$ $(l \geq 3)$, 则存在含单位元的结合代数 A 使得 $\mathcal{L}$ 与 $\mathfrak{sl}_{l+1}(A)$ 是中心同源的。

A_1 型根系分次李代数

关于 A_1 型根系分次的李代数的情况，Benkart 和 Zelmanov 在 [BZ] 中在中心同源的基础上给出了分类：

定理 (Benkart-Zelmanov)

设 $\mathcal{L}$ 是一个根系 A_1 分次李代数，则存在含单位元的 Jordan 代数 J 使得 $\mathcal{L}$ 与 J 的 Tits-Kantor-Koecher 构造 $\mathcal{K}(J)$ 是中心同源的。

A 型高维仿射李代数

高维仿射李代数 $\mathcal{L}$ 的锥 $\mathcal{L}_c$ 是 $\mathcal{L}$ 的理想

$$\mathcal{L}_c = \left\langle \mathcal{L}_\alpha \,\middle|\, \alpha \in R^\times \right\rangle.$$

记 $\mathcal{K} = \mathcal{L}_c/\mathcal{Z}(\mathcal{L}_c)$。

定义

$\mathcal{L}_c$ 的中心化子 $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_c)$ 等于 $\mathcal{L}_c$ 的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}_c)$, 则称 $\mathcal{L}$ 为温顺的。

分类高维仿射李代数：先决定根系 R 和锥 $\mathcal{L}_c$ 的结构，从而得到 $\mathcal{K}$ 所有可能；反之，从给定 $\mathcal{K}$ 通过中心扩张并加入一些导子得到所有可能的温顺高维仿射李代数。

A 型高维仿射李代数

关于 A 型高维仿射李代数我们有

定理

设 $\mathcal{L}$ 是一个零度为 ν、根系为 R 的高维仿射李代数。

(i) [Berman-G-Krylyuk] 若 $\dot{R} = A_l$ $(l \geq 3)$, 则存在 ν 个变量的量子环面 $\mathbb{C}_Q$ 使得 $\mathcal{L}_c$ 与 $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C}_Q)$ 中心同源。

(ii) [Berman-G-Krylyuk-Neher] 若 $\dot{R} = A_2$, 则存在 ν 个变量的量子环面 $A = \mathbb{C}_Q$ 或者 ν (≥ 3) 个变量的 Cayley 环面 $A = \mathbb{O}_t$ 使得 $\mathcal{L}_c$ 与 $\mathfrak{psl}_3(A)$ 中心同源。

(iii) [Yoshii] 若 $\dot{R} = A_1$, 则存在 ν 个变量的 Jordan 环面 J 使得 $\mathcal{L}_c$ 与 Tits-Kantor-Koecher 构造 $\mathcal{K}(J)$ 中心同源。

§4. 高维仿射李代数的表示.

A 型高维仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$

令 $Q = (q_{ij})$ 为 $(\nu+1)\times(\nu+1)$ 矩阵，满足 $q_{ii} = 1$, $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$。Q 对应的量子环面 $\mathbb{C}_Q = \mathbb{C}_Q[t_0^{\pm 1}, t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\nu^{\pm 1}]$ 是由 $t_0^{\pm 1}, \ldots, t_\nu^{\pm 1}$ 生成的结合代数，并且满足

$$t_i t_i^{-1} = t_i^{-1} t_i = 1, \; t_i t_j = q_{ij} t_j t_i.$$

对 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$, 记 $t^\alpha = t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \cdots t_\nu^{\alpha_\nu}$。若 $\nu = 1$, 则 Q 由 $q = q_{10}$ 决定。简记 $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}_q[t_0^{\pm}, t_1^{\pm}] = \mathbb{C}_Q[t_0^{\pm}, t_1^{\pm}]$, 则有

$$\mathbb{C}_q = \mathbb{C}_Q[t_0^{\pm}, t_1^{\pm}] = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{C} t_0^m t_1^n.$$

A 型高维仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$

在 $\mathbb{C}_q$ 上定义线性函数：

$$\kappa(t_0^m t_1^n) = \delta_{m,0}\delta_{n,0}.$$

令 d_0 和 d_1 为量子环面 $\mathbb{C}_q$ 上的导子：

$$d_0(t_0^m t_1^n) = m t_0^m t_1^n, \quad d_1(t_0^m t_1^n) = n t_0^m t_1^n.$$

记 $M_n(\mathbb{C}_q)$ 是系数为 $\mathbb{C}_q$ 的 $n \times n$ 矩阵结合代数，对应的一般线性李代数记为 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)$, 有李括号运算

$$[A, B] = AB - BA, \ \forall\, A, B \in M_n(\mathbb{C}_q).$$

李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)$ 上由 κ 自然诱导的非退化不变双线性型：

$$(E_{ij}(a), E_{kl}(b)) = \delta_{jk}\delta_{il}\kappa(ab), \ \forall\, a, b \in \mathbb{C}_q.$$

A 型高维仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$

李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)$ 有如下的中心扩张：

$$\widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q) \oplus \mathbb{C}c_0 \oplus \mathbb{C}c_1.$$

李括号：

$$\begin{aligned}
&[E_{ij}(t_0^{m_1} t_1^{n_1}), E_{kl}(t_0^{m_2} t_1^{n_2})] \\
&\qquad = \delta_{jk} q^{n_1 m_2} E_{il}(t_0^{m_1+m_2} t_1^{n_1+n_2}) - \delta_{il} q^{n_2 m_1} E_{kj}(t_0^{m_1+m_2} t_1^{n_1+n_2}) \\
&\qquad\quad + q^{n_1 m_2} \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{m_1+m_2,0} \delta_{n_1+n_2,0} \big(m_1 c_0 + n_1 c_1\big)
\end{aligned}$$

其中 $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, c_0 和 c_1 为 $\widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 的中心元素。

A 型高维仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$

将度导子 d_0 和 d_1 自然扩展到 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)$ 上，令

$$\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)} = \widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)} \oplus \mathbb{C}d_0 \oplus \mathbb{C}d_1.$$

最后，扩展 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)$ 上的非退化不变双线性型：

$$(E_{ij}(a), E_{kl}(b)) = \delta_{jk}\delta_{il}\kappa(ab), \ (c_0, d_0) = (c_1, d_1) = 1.$$

则李代数 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 为 A_{n-1} 型零度为 2 的高维仿射李代数。

顶点算子表示

令 $\xi = \xi_n$ 为 n 次本原单位根。在 $n \times n$ 矩阵 $M_n(\mathbb{C})$ 中定义：

$$E = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n1},\ F = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}(\xi^{i-1}).$$

则 $\{F^i E^j\}_{1 \le i,j \le n}$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的一组基。类似于 $\widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 定义李代数

$$\widehat{\mathfrak{gl}_{mn}(\mathbb{C}_Q)} = \mathfrak{gl}_{mn}(\mathbb{C}_Q) \oplus \mathcal{C} \cong (M_m(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_Q) \oplus \mathcal{C}$$

其中 $\mathcal{C} = \mathbb{C}c_0 \oplus \mathbb{C}c_1 \oplus \cdots \mathbb{C}c_\nu$ 是 $\nu + 1$ 个中心元素张成的空间。设 $\mathfrak{g}(m, n, Q)$ 是由 $E_{ij} \otimes F^k E^l \otimes t_0^{\alpha_0(n-1)+l-k} t^\alpha$ 生成的子代数。

顶点算子表示

对 $1 \le i, j \le m$, $1 \le k \le n-1$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$, 定义

$$X_{ij}^k(\alpha, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (E_{ij} \otimes F^k E^l \otimes t_0^l t_1^{\alpha_1} \cdots t_\nu^{\alpha_\nu}) z^{-l} \in \mathfrak{g}(m, n, Q)[[z, z^{-1}]].$$

对于正整数 $M \ge 1$, 定义格：

$$\Gamma_M = \bigoplus_{i=1}^{M} \mathbb{Z}\varepsilon_i, \quad Q_M = \bigoplus_{i=1}^{M-1} \mathbb{Z}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$$

以及对称双线性型 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$。记 $H_M = \mathbb{C} \otimes \Gamma_M$。

顶点算子表示

考虑无穷维 Heisenberg 李代数

$$\mathcal{H}_M = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\varepsilon_i(k),\ c \,\big|\, 1 \le i \le M,\ k \in \mathbb{Z}\},$$

相应的李括号为

$$[\alpha(k), \beta(l)] = k(\alpha, \beta)\delta_{k+l,0}c$$

其中 $\alpha, \beta \in H_M$, $k, l \in \mathbb{Z}$, c 为中心元素。令

$$\mathcal{H}_M^{\pm} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\varepsilon_i(k) \,\big|\, 1 \le i \le M,\ k \in \mathbb{Z}_{\pm}\},$$

$\mathcal{S}(\mathcal{H}_M^-)$ 为交换李代数 $\mathcal{H}_M^-$ 对应的对称代数。

顶点算子表示

令

$$\mathbb{C}[\Gamma_M] = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma_M} \mathbb{C}e^{\alpha}$$

为 Γ_M 的扭群代数，乘法由二上圈 ϵ 给出：

$$e^{\alpha}e^{\beta} = \epsilon(\alpha,\beta)e^{\alpha+\beta}$$

其中 $\alpha,\beta\in\Gamma_M$。二上圈 $\epsilon:\Gamma_M\times\Gamma_M\to\{\pm1\}$ 定义如下

$$\epsilon(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1\ (i\leq j),\quad \epsilon(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-1\ (i>j),$$

$$\epsilon(\sum_i m_i\varepsilon_i,\sum_j n_j\varepsilon_j)=\prod_{ij}\big(\epsilon(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\big)^{m_in_j}.$$

顶点算子表示

定义 Fock 空间

$$V_M = \mathcal{S}(\mathcal{H}_M^-) \otimes \mathbb{C}[\Gamma_M].$$

李代数 $\mathcal{H}_M$ 和扭群代数 $\mathbb{C}[\Gamma_M]$ 在 V_M 上作用：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i(k).u \otimes e^\beta &= k\Big(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i(-k)} u\Big) \otimes e^\beta \ \ (k \in \mathbb{Z}_+),\\
\varepsilon_i(k).u \otimes e^\beta &= (\varepsilon_i(k) u) \otimes e^\beta \ \ (k \in \mathbb{Z}_-),\\
\varepsilon_i(0).u \otimes e^\beta &= (\varepsilon_i, \beta) u \otimes e^\beta,\\
c.u \otimes e^\beta &= u \otimes e^\beta,\\
e^\alpha.u \otimes e^\beta &= \epsilon(\alpha, \beta) u \otimes e^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta \in \Gamma_M$, $1 \le i \le M$, $u \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_M^-)$。

顶点算子表示

对 $\alpha \in \Gamma_M$ 定义 $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_M)[[z, z^{-1}]]$ 中元素：

$$\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha(k) z^{-k}, \quad E^{\pm}(\alpha, z) = \exp\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_{\pm}} \frac{\alpha(k)}{k} z^{-k} \right).$$

进一步，定义 $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_M)[[z, z^{-1}]]$ 中算子：

$$X(\alpha, z) = E^{-}(-\alpha, z) E^{+}(-\alpha, z) e^{\alpha} z^{\alpha} z^{\frac{(\alpha,\alpha)}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{(\alpha,\alpha)}{2}} x_k(\alpha) z^{-k},$$

定义算子

$$z^{\alpha}.u \otimes e^{\beta} = z^{(\alpha,\beta)} u \otimes e^{\beta}, \quad a^{\alpha}.u \otimes e^{\beta} = a^{(\alpha,\beta)} u \otimes e^{\beta}.$$

顶点算子表示

若 $(\alpha, \alpha) = 1$, 定义正则序

$$: x_k(\varepsilon_i) x_{-l}(-\varepsilon_j) := x_k(\varepsilon_i) x_{-l}(-\varepsilon_j) - \delta_{ij}\delta_{kl}\theta(k)$$

其中 $k, l \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, $1 \le i, j \le M$, 并且 $\theta(k) = \delta_{k>0}$。对 $1 \le i, j \le M$ 以及 $a \in \mathbb{C}^\times$, 定义算子

$$X_{ij}(a, z) =: X(\varepsilon_i, z) X(-\varepsilon_j, az) : .$$

固定正整数 M 以及 $\mathbb{C}^\times$ 的容许子群 G, 记 $\mathfrak{g}(G, M)$ 是由 c 以及 $x_{ij}(k, a, b)$ $(1 \le i, j \le M,\ a, b \in G)$ 张成的线性空间，其中

$$X_{ij}(a, b, z) = X_{ij}(a^{-1}b, az) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{ij}(k, a, b) z^{-k}.$$

顶点算子表示

定理 (Berman-G-Tan)

线性空间 $\mathfrak{g}(G,M)$ 是 Fock 空间 V_M 上一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(V_M)$ 的子代数。更进一步，我们有

$$V_M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_M^{(k)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \left(e^{k\varepsilon_M + Q_M} \otimes \mathcal{S}(\mathcal{H}_M^-)\right),$$

并且 $V_M^{(k)}$ 是一个不可约的 $\mathfrak{g}(G,M)$-模。

对一些具体的 G 和 M 我们有：

顶点算子表示

推论 (Berman-G-Tan)

(1) 若 $G=\{1\}$, $M\geq 2$, 则定理中 $\mathfrak{g}(G,M)$ 给出了仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_M(\mathbb{C})}$ 在 Fock 空间 V_M 上的齐次表示，表示映射为

$$E_{ij}\otimes t_0^k\mapsto x_{ij}(k,1,1),\quad c_0\mapsto c.$$

(2) 若 $M=1$, 而 $G=\langle\xi_N\rangle$, 则定理中 $\mathfrak{g}(G,M)$ 给出了仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})}$ 在 Fock 空间 V_1 上的主表示，表示映射为

$$F^iE^k\otimes t_0^k\mapsto\begin{cases}x_{11}(k,\xi^{i-1},\xi^{-1})+\frac{e^{\frac{i}{2}Ln\xi}}{\xi^{i}-1}\delta_{k0}c, & \text{若 } 1\leq i\leq N-1,\\ x_{11}(k,\xi^{-1},\xi^{-1}), & \text{若 } i=0,\end{cases}$$

$$c_0\mapsto\frac{c}{N}.$$

顶点算子表示

推论 (Berman-G-Tan)

若 $M \geq 2$, $G = \langle q \rangle$ 是由非零且非单位根的复数 q 生成的群，则定理中 $\mathfrak{g}(G, M)$ 给出了李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_M(\mathbb{C}_q)}$ 在 Fock 空间 V_M 上的齐次实现，映射为

$$E_{ij} \otimes t_0^m t_1^r \mapsto \begin{cases} x_{ij}(m, 1, q^r) + \frac{q^{\frac{r}{2}}}{1-q^r}\delta_{ij}\delta_{m0}c, & \text{如果 } r \neq 0, \\ x_{ij}(m, 1, 1), & \text{如果 } r = 0, \end{cases}$$

$$c_0 \mapsto c, \quad c_1 \mapsto 0.$$

A_1 型高维仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

在 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 上定义实线性函数 $\omega : \widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)} \to \widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$

$$\omega(\lambda x) = \bar{\lambda}\omega(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)};$$

$$\omega(E_{ij}(a)) = (-1)^{i+j}E_{ji}(\bar{a}),\ \ a \in \mathbb{C}_q;$$

$$\omega(c_0) = c_0,\ \omega(c_1) = c_1,\ \omega(d_0) = d_0,\ \omega(d_1) = d_1,$$

其中 $\overline{\lambda t_0^m t_1^n} = \bar{\lambda} t_1^{-n} t_0^{-m}$, $\bar{\lambda}$ 为复数 λ 的复共轭。

引理

如果 $|q| = 1$, 则 ω 为 $\widetilde{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 上的一个反线性反对合映射。

$\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

令

$$V = \mathbb{C}[x_{(m,n)} \,|\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2]$$

为无穷个变量的多项式环。线性算子 $x_{(m,n)}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_{(m,n)}}$ 在 V 上的作用分别为乘法以及对相应变量的求导。

给定一族 2×2 下三角矩阵 $X = \{X_{m,n} \,|\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$, 其中

$$X_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{(m,n)} & 0 \\ c_{(m,n)} & d_{(m,n)} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

$\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

定义算子

$$P_{\mathbf{A}} = a_{\mathbf{A}}\frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{A}}}, \quad Q_{\mathbf{A}} = c_{\mathbf{A}}\frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{A}}} + d_{\mathbf{A}}x_{\mathbf{A}},$$

其中 $\mathbf{A} = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$。对于 $\mu \in \mathbb{C}$, 在 V 上定义：

$$e_{21}(m_1, n_1) = Q_{(m_1,n_1)},$$

$$e_{12}(m_1, n_1) = -q^{-m_1n_1}\mu P_{(-m_1,-n_1)} - \sum q^{n_1m'+nm_1+nm'}Q_{(m+m'+m_1,n+n'+n_1)}P_{(m,n)}P_{(m',n')},$$

$$e_{11}(m_1, n_1) = -\sum q^{nm_1}Q_{(m+m_1,n+n_1)}P_{(m,n)} - \frac{1}{2}\mu\delta_{m_1,0}\delta_{n_1,0},$$

$$e_{12}(m_1, n_1) = \sum q^{mn_1}Q_{(m+m_1,n+n_1)}P_{(m,n)} + \frac{1}{2}\mu\delta_{m_1,0}\delta_{n_1,0},$$

$$D_1 = \sum mQ_{(m,n)}P_{(m,n)}, \quad D_2 = \sum nQ_{(m,n)}P_{(m,n)}.$$

$\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

定理 (G-Zeng)

线性映射 $\pi_{X,\mu}:\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}\to\mathfrak{gl}(V)$ 使得

$$E_{ij}(t_0^{m_1}t_1^{n_1})\mapsto e_{ij}(m_1,n_1),\ d_0\mapsto D_1,\ d_1\mapsto D_2,\ c_0,c_1\mapsto 0$$

是一个李代数同态，也就是 $V=\mathbb{C}[x_{(m,n)}\,|\,(m,n)\in\mathbb{Z}^2]$ 是 $\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的一个表示。特别地，对所有的 X 和 μ 表示 V 都是最高权表示。

$\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

定理 (G-Zeng)

设参数 μ 为一个实数。则空间 $V = \mathbb{C}[x_{(m,n)} \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2]$ 上存在一个关于 $\pi_{X,\mu}$ 和 ω 的共变厄米特型 $(\cdot,\cdot)$ 使得

$$\left(\pi_{X,\mu}(a)(f), g\right) = \left(f, \pi_{X,\mu}(\omega(a))(g)\right)$$

对所有 $f, g \in V$ 以及 $a \in \widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 成立。

$\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的厄米特表示

定义

如果上述厄米特双线性型是正定的，则称 $\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$ 的表示 $(V, \pi_{X,\mu})$ 关于 ω 是可以酉化的。

双线性型正定的充分必要条件为：

定理 (G-Zeng)

表示 $(V, \pi_{X,\mu})$ 关于 ω 是可以酉化的当且仅当实参数 μ 是正数。

§5. 高维仿射李代数的量子化.

A_{n-1} 型量子环面代数

设 $d, q \in \mathbb{C}^\times$，并且 q 不是单位根。[GKV] 给出了 A_{n-1} 型量子环面代数的定义：

定义

A_{n-1} 型量子环面代数 $U_q(\mathfrak{sl}_{n,tor})$ 是由 $e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,l}, k_i^{\pm 1}$ 及中心元素 $c^{\pm 1}$ 生成的含幺结合代数，其中 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}^\times$,

$$e_i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_{i,k} z^{-k}, \quad f_i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{i,k} z^{-k},$$

及

$$k_i^{\pm}(z) = k_i^{\pm 1} \exp\left(\pm (q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} h_{i,\pm k} z^{\mp k} \right),$$

A_{n-1} 型量子环面代数

满足

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = cc^{-1} = 1, \quad [k_i^{\pm}(z), k_j^{\pm}(w)] = 0,$$

$$\theta_{-a_{ij}}(c^2 d^{-m_{ij}} \frac{w}{z}) k_i^{+}(z) k_j^{-}(w) = \theta_{-a_{ij}}(c^{-2} d^{-m_{ij}} \frac{w}{z}) k_j^{-}(w) k_i^{+}(z),$$

$$k_i^{\pm}(z) e_j(w) = \theta_{\mp a_{ij}}(c^{-1} d^{\mp m_{ij}} (\frac{w}{z})^{\pm 1}) e_j(w) k_i^{\pm}(z),$$

$$k_i^{\pm}(z) f_j(w) = \theta_{\pm a_{ij}}(c d^{\mp m_{ij}} (\frac{w}{z})^{\pm 1}) f_j(w) k_i^{\pm}(z),$$

$$[e_i(z), f_j(w)] = \frac{\delta_{ij}}{q - q^{-1}} (\delta(c^{-2} \frac{z}{w}) k_i^{+}(cw) - \delta(c^2 \frac{z}{w}) k_i^{-}(cz)),$$

$$(d^{m_{ij}} z - q^{a_{ij}} w) e_i(z) e_j(w) = (q^{a_{ij}} d^{m_{ij}} z - w) e_j(w) e_i(z),$$

$$(q^{a_{ij}} d^{m_{ij}} z - w) f_i(z) f_j(w) = (d^{m_{ij}} z - q^{a_{ij}} w) f_j(w) f_i(z),$$

A_{n-1} 型量子环面代数

以及

$$\{e_i(z_1)e_i(z_2)e_j(w) - (q+q^{-1})e_i(z_1)e_j(w)e_i(z_2) + e_j(w)e_i(z_1)e_i(z_2)\}$$
$$+\{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0, \text{ 若 } a_{ij} = -1,$$

$$\{f_i(z_1)f_i(z_2)f_j(w) - (q+q^{-1})f_i(z_1)f_j(w)f_i(z_2) + f_j(w)f_i(z_1)f_i(z_2)\}$$
$$+\{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0, \text{ 若 } a_{ij} = -1,$$

$$[e_i(z), e_j(w)] = [f_i(z), f_j(w)] = 0, \text{ 若 } a_{ij} = 0,$$

其中

$$\theta_m(z) = \frac{q^m z - 1}{z - q^m} \in \mathbb{C}[[z]].$$

A_{n-1} 型量子环面代数

A 为 A 型广义 Cartan 矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M=(m_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注记

注记

(1) 量子环面代数 $U_q(\mathfrak{sl}_{n,tor})$ 是双 loop 李代数泛中心扩张（也就是环面李代数）包络代数的双参数量子形变；

(2) 量子环面代数 $U_q(\mathfrak{sl}_{n,tor})$ 包含两个重要的子代数：水平子代数 $\dot{U}_h$ 和垂直子代数 $\dot{U}_v$，并且都同构于量子仿射代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$；

(3) Varagnolo 和 Vasserot 在 [VV] 中证明了量子环面代数 $U_q(\mathfrak{sl}_{n,tor})$ 是李代数 $\widehat{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}_q)}$ 包络代数的量子化；

(4) G-Jing 在 [GJ] 中在 Fock 空间上构造了量子环面代数 $U_q(\mathfrak{sl}_{n,tor})$ 的顶点算子表示。

参考文献

B. Allison, S. Azam, S. Berman, Y. Gao and A. Pianzola, *Extended affine Lie algebras and their root systems*, Mem. Amer. Math. Soc. **126** (1997), no. 603, x+122.

G. Benkart and E. Zelmanov, *Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras*, Invent. Math. **126** (1996), 1–45.

S. Berman, Y. Gao and Y. Krylyuk, *Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 339–389.

S. Berman, Y. Gao and S. Tan, *A unified view of some vertex operator constructions*, Israel J. Math. **134** (2003), 29–60.

S. Berman and R.V. Moody, *Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy*, Invent. Math. **108** (1992), 323–347.

Y. Gao and N. Jing, *$U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ actiong on $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$-modules and quantum toroidal algebras*, J. Algebra **273** (2004), 320-343.

Y. Gao and Z. Zeng, *Hermitian representations of the extended affine Lie algebra $\widetilde{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}_q)}$*, Adv. Math. **207** (2006), 244–265.

M. Varagnolo and E. Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998) 133–159.

谢谢