典型李群和它们的表示

孙斌勇

中国科学院数学与系统科学研究院

2016.10.12

目录

1.群和李群

群：描述对称性，比如人体左右对称。

群论起源：1830年代Galois通过研究高次多项式根的对称性，解决了方程根式求解问题。

Évariste Galois (1811 – 1832)

对称性的数学描述：

$$G \times X \to X.$$

例：

$$X = \text{任意一个集合}, \quad G = \{X\text{到}X\text{的双射}\},$$

$$G \times X \to X, \quad (f, x) \to f(x).$$

流形：空间的数学描述。

李群：描述空间的对称性。

李群的局部理论起源于Sophus Lie（1842-1899）关于偏微分方程的研究。

Sophus Lie (1842 – 1899)

H. Weyl, E. Cartan和O. Schreier等在1920年代建立了李群的整体理论。

定义.一个李群是这样一个数学对象：它是一个光滑微分流形同时又是一个群，并且群运算都是光滑映射。

典型群名称来自于：Hermann Weyl, The Classical Groups, 1939.

Hermann Weyl, 1885-1955

一般线性群：

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}).$$

实正交群和实辛群：

$$\mathrm{O}(p,q), \quad \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

复正交群、复辛群和酉群：

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{U}(p,q).$$

四元数正交群和四元数辛群：

$$\mathrm{O}^*(2n), \quad \mathrm{Sp}(p,q).$$

一般线性群：线性空间的对称群。

正交群：对称双线性空间的对称群。

辛群：辛空间的对称群。

酉群：Hermitian空间的对称群。

四元数正交群和四元数辛群：四元数斜Hermitian空间和四元数Hermitian空间的对称群。

物理学中的例子.

欧几里得空间和物理基本定律：$\mathrm{O}(3)$。

时空和狭义相对论：$\mathrm{O}(3,1)$。

量子色动力学：$\mathrm{U}(3)$。

哈密尔顿力学：$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$。

典型李群的统一描述：
设A是一个有限维$\mathbb{R}$-结合代数，τ是A的一个对合，那么

$$G := \{a \in A^\times \mid aa^\tau = 1\}$$

是一个李群。如果A是单的，或者A是由τ互相置换的两个单代数的乘积，那么G是一个典型群。

3.极大紧子群

李群最基本的不变量：极大紧子群、李代数。

Cartan-Iwasawa-Malcev定理. 设G是一个只有有限多个连通分支的李群。

(a). G有一个极大紧子群K。

(b). G的所有极大紧子群都是共轭的。

(c). 存在G的一个闭子流形S使得S微分同胚于一个欧氏空间并且乘法映射

$$K \times S \to G$$

是微分同胚。

紧酉群、紧正交群和紧辛群：

$$\mathsf{U}(n), \quad \mathsf{O}(n), \quad \mathrm{Sp}(n).$$

最简单连通紧李群：$\mathsf{U}(1)$ 是圆周群。

$\mathsf{O}(n)$ 是不连通的$(n \geq 1)$。

极大紧子群：

$$\mathsf{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \mathsf{U}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}).$$

$$\mathsf{O}(p) \times \mathsf{O}(q) \subset \mathsf{O}(p,q), \quad \mathsf{U}(n) \subset \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

$$\mathsf{O}(n) \subset \mathsf{O}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}), \quad \mathsf{U}(p) \times \mathsf{U}(q) \subset \mathsf{U}(p,q).$$

$$\mathsf{U}(n) \subset \mathsf{O}^*(2n), \quad \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q) \subset \mathrm{Sp}(p,q).$$

Cartan分解：

$$\mathsf{O}(n) \times \{\text{正定对称矩阵}\} \leftrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

设M是一个光滑流形，记$C^\infty(M;\mathbb{R})$为M上的实光滑函数组成的代数。

$$\{M\text{上的切向量场}\} \leftrightarrow \{C^\infty(M;\mathbb{R})\text{上的导子}\}.$$

定义：一个实李代数是一个实线性空间$\mathfrak{g}$, 以及它上面满足Jacobi等式的一个反对称双线性映射：$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$。

李群G的李代数：G上所有左不变切向量场组成的空间。

连通李群几乎由它的李代数确定。

典型李群的李代数

一般线性群：

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}).$$

实正交群和实辛群：

$$\mathfrak{o}(p,q), \quad \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

复正交群、复辛群和酉群：

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{u}(p,q).$$

四元数正交群和四元数辛群：

$$\mathfrak{o}^*(2n), \quad \mathfrak{sp}(p,q).$$

群表示是线性化的对称性。

定义. 设G是一个李群，V是一个有限维复线性空间。G在V上的一个表示是指一个连续线性作用

$$G \times V \to V.$$

典型李群的标准表示.

一般线性群：

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{C}^n, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \curvearrowright \mathbb{C}^{2n}.$$

实正交群和实辛群：

$$\mathsf{O}(p,q) \curvearrowright \mathbb{C}^{p+q}, \quad \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{C}^{2n}.$$

复正交群、复辛群和酉群：

$$\mathsf{O}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n, \quad \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^{2n}, \quad \mathsf{U}(p,q) \curvearrowright \mathbb{C}^{p+q}.$$

四元数正交群和四元数辛群：

$$\mathsf{O}^*(2n) \curvearrowright \mathbb{C}^{2n}, \quad \mathrm{Sp}(p,q) \curvearrowright \mathbb{C}^{2p+2q}.$$

李群G的一维表示$\leftrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$.

例：

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times) \qquad (n \geq 1).$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{O}(p,q), \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}, \mathbb{C}^\times) \qquad (p, q \geq 1).$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) = \{1\} \qquad (n \geq 0).$$

李群的有限维表示$\leftrightsquigarrow$紧李群的有限维表示。

例：$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

命题.紧李群的每个有限维表示都是不可约表示的直和。

$$\{\text{有限群}\} \subset \{\text{紧李群}\}.$$

有限群的结构和表示论：困难！

连通紧李群：根数据(root datum)，最高权理论。

Cartan极大子环面定理. 设G是一个连通紧李群。

(a). G有一个极大子环面T。

(b). G的所有极大子环面都是共轭的。

(c). G的每个元素都包含在G的某个极大子环面中。

连通紧李群：根数据(root datum)，最高权理论。

Cartan极大子环面定理. 设G是一个连通紧李群。

(a). G有一个极大子环面T。

(b). G的所有极大子环面都是共轭的。

(c). G的每个元素都包含在G的某个极大子环面中。

Élie Cartan, 1869-1951

例.

$$G = \mathrm{U}(n) \supset T = \mathrm{U}(1)^n.$$

$$G = \mathrm{SO}(n) \supset T = \mathrm{SO}(2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Cartan最高权理论. 设G是一个连通紧李群，T是它的一个极大子环面。那么

$$\mathsf{Irr}(G) \leftrightarrow W\backslash \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times).$$

例.

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{U}(n)) \leftrightarrow \mathcal{S}_n \backslash \mathbb{Z}^n = \{(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

$$\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{C}[\mathbb{C}^{n\times k}].$$

当k充分大时，$\mathrm{O}(n)$ 的所有不可约表示都出现于$\mathbb{C}[\mathbb{C}^{n\times k}]$.

$$\text{分解 } \mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{C}[\mathbb{C}^{n\times k}] \leftrightsquigarrow \text{计算}\mathbb{C}[\mathbb{C}^{n\times k'}]^{\mathrm{O}(n)}.$$

例.

$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^{\mathrm{O}(n)} = \mathbb{C}[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2] \quad (n \geq 1).$$

几何描述:

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})\backslash\backslash\mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

第一基本定理.

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})\backslash\backslash\mathbb{C}^{n\times k} \hookrightarrow \{y \in \mathbb{C}^{k\times k} \mid y^t = y\}, \quad x \mapsto x^t x.$$

第二基本定理. 确定这个映射的象。

类似定理：$\mathsf{U}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$.

构造表示的俩种基本方法：诱导、限制。

$$\text{限制} \leftrightarrow \text{对称破缺}.$$

酉群分歧定理.

$$(F_\mu)|_{\mathrm{U}(n-1)} = \bigoplus_{\nu \preccurlyeq \mu} F_\nu.$$

类似定理：$\mathrm{O}(n) \downarrow \mathrm{O}(n-1)$.

8. 无穷维表示

为什么？调和分析、量子力学、数论⋯。

例.

傅里叶级数：

$$\mathrm{U}(1) \curvearrowright \mathrm{L}^2(\mathrm{U}(1)).$$

傅里叶变换：

$$\mathbb{R}^n \curvearrowright \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

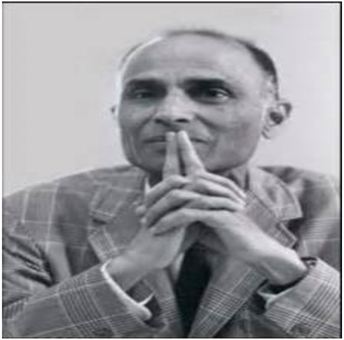
自守形式：

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})).$$

奠基人:

Israïl Moiseevich Gelfand, 1913-2009

奠基人：



Harish-Chandra, 1923-1983

定义. 设G是一个李群，V是一个准完备的Hausdorff局部凸复拓扑向量空间。G在V上的一个表示是指一个连续线性作用

$$G \times V \to V.$$

调和分析的基石：不可约酉表示。

不可约酉表示的分类？

例. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B := \{上三角矩阵\} \subset G$。V是B的一个有限维表示。

$$\mathrm{Ind}_B^G V := \{f \in C^\infty(G;V) \mid f(bg) = b.f(g),\ b \in B,\ g \in G\}.$$

定义. 设G是一个典型李群, 如果G的一个表示是Fréchet、光滑、缓增、可许和$Z(\mathfrak{g})$-有限的，那么它就叫做一个Casselman-Wallach表示。

例. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B := \{$上三角矩阵$\} \subset G$。V是B的一个有限维表示。那么

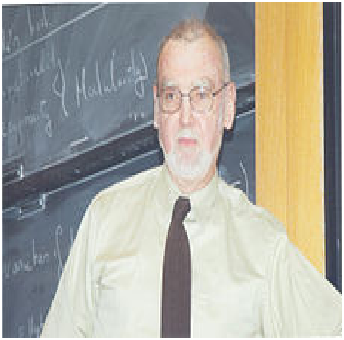
$$\mathrm{Ind}_B^G V$$

是G的一个Casselman-Wallach表示。

Langlands纲领的基础：局部Langlands对应。

例.

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \leftrightarrow \mathcal{S}_n \backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, (\mathbb{C}^\times)^n).$$



Robert Langlands, 1936-

9.Theta对应

- 经典不变量理论从有限维向无穷维的发展。
- Roger Howe 在1970年代建立。

当k充分大时，每个$\pi \in \mathsf{Irr}(\mathsf{O}(p,q))$出现于

$$\mathsf{O}(p,q) \curvearrowright \mathsf{S}(\mathbb{R}^{(p+q)\times k}).$$

如果$2|p+q$, 那么

$$\mathsf{O}(p,q) \times \mathrm{Sp}_{2k}(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathsf{S}(\mathbb{R}^{(p+q)\times k}).$$

定理

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{O}(p,q)) \leftrightsquigarrow \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_{2k}(\mathbb{R})).$$

- 可以推广到所有典型李群。

应用

- 表示的构造和结构,
- 不可约酉表示,
- 自守表示。

10.局部Gan-Gross-Prasad猜想

- 经典不变量理论从有限维向无穷维的发展。

给定$\pi \in \mathsf{Irr}(\mathsf{U}(p,q))$, $\sigma \in \mathsf{Irr}(\mathsf{U}(p,q-1))$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{U}(p,q-1)}(\pi,\sigma) =?$$

重数一定理.

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathsf{U}(p,q-1)}(\pi, \sigma) \leq 1.$$

进展：Jean-Loup Waldspurger, Raphaël Beuzart-Plessis，何鸿宇, $\cdots$

谢谢!