生物中若干偏微分方程模型

楼元 (人民大学和俄亥俄州大)

中国科学院数学与系统科学研究院

2018.05.02

Outline

Logistic 模型

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha\Delta u + u[m(x) - u] \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\
\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty).
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

- $u(x,t)$: 种群密度
- α: 扩散率
- $m(x)$: 生长率
- Ω: R^N中有界区域, 封闭边界条件

种群数量

$$\begin{cases} \alpha\Delta u + u[m(x) - u] = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

- 如果 $m(x) > 0$ 为光滑的非常值函数，则对 $\alpha > 0$,

$$\int_\Omega u > \int_\Omega m = \lim_{\alpha\to 0}\int_\Omega u = \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega u$$

- 预测： $\alpha > 0$ 时的种群数量大于 $\alpha = 0, \infty$ 时的种群数量。

生物实验: DeAngelis et al. 2016

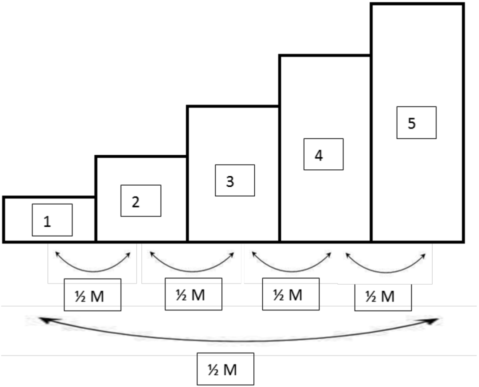


Figure 1. Model configuration, showing that five containers with gradient in nutrient supply (in the proportions 0:0.5:1:1.5:2, from compartment 1 to compartment 5) with rates of diffusion (M). Half of the biomass removed from each container was transferred to the container on the right and half to the container on the left (this included moving plant biomass between containers 1 and 5).

实验结果

Duckweed Experiment and Simulation

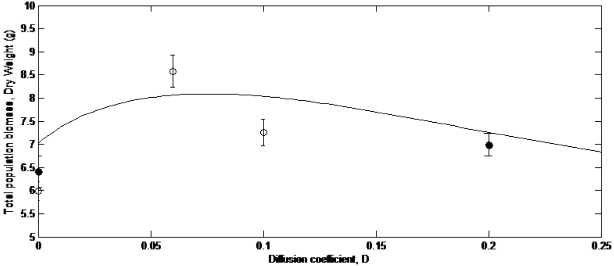


Figure. Mean and standard deviation of total dry biomass as functions of diffusion coefficient from experiment and model simulation. The dark dots show the total dry weight under heterogeneous condition with different diffusion rates (0%, 20%) from first experiment. The empty dots show the total dry weight under heterogeneous conditions with different diffusion rates (0%, 6%, 10%) from the second experiment. P<0.05 indicates significant differences between treatments. The solid line shows results for dry mass as a function of diffusion coefficient (from 0% to 25%) from the simulation model.

相关课题

- **猜测：** (W.-M. Ni): 存在某个正常数 $C(N)$ 使得

$$1 < \frac{\int_\Omega u}{\int_\Omega m} < C(N).$$

- Bai et al. (Proc AMS 2015) 证明 $C(1) = 3$ 为最佳上界; 对高维情形尚不清楚。

相关课题

- **猜测：** (W.-M. Ni): 存在某个正常数 $C(N)$ 使得

$$1 < \frac{\int_\Omega u}{\int_\Omega m} < C(N).$$

- Bai et al. (Proc AMS 2015) 证明 $C(1) = 3$ 为最佳上界; 对高维情形尚不清楚。

- 种群数量的应用: L, JDE 2006; He & Ni, CPAM 2016

河流模型

- **问题：** 为什么物种在河流中能够存活，而不会被河水冲走？

河流模型

- **问题：** 为什么物种在河流中能够存活, 而不会被河水冲走？
- Speirs 和 Gourney 模型 (2001)

$$
\begin{cases} u_t = Du_{xx} - qu_x + u(r-u) \quad \text{in } (0, L), \\ \\ Du_x(0,t) = qu(0,t), \quad u(L,t) = 0. \end{cases} \tag{1.3}
$$

  - $u(x,t)$: 物种密度
  - $D, q > 0$: 扩散和对流系数
  - $r > 0$: 物种生长率
  - $L > 0$: 河流长度

河流模型

- 记 λ_1 为以下问题的最小特征值

$$\begin{cases} D\varphi_{xx} - q\varphi_x + (r+\lambda)\varphi = 0, \quad 0 < x < L, \\ D\varphi_x(0) - q\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

河流模型

- 记 λ_1 为以下问题的最小特征值

$$\begin{cases} D\varphi_{xx} - q\varphi_x + (r+\lambda)\varphi = 0, & 0 < x < L, \\ D\varphi_x(0) - q\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

- **观察：** 物种存活
  $\Leftrightarrow$ 平衡解 $u = 0$ 不稳定
  $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 < 0$.

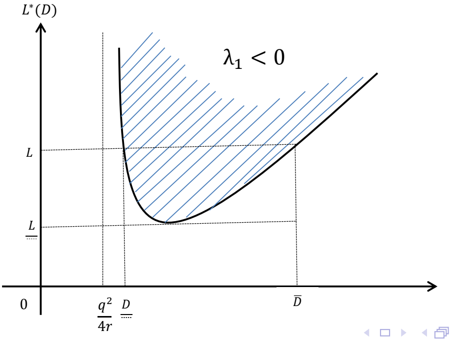
河流模型

- $$\lambda_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow D > \frac{q^2}{4r} \text{ 且 } L > L^* := \frac{\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{4Dr-q^2}}{q}\right)}{\frac{\sqrt{4Dr}}{2D}}$$

河流模型

- $$\lambda_1 < 0$$
$$\Leftrightarrow D > \frac{q^2}{4r} \ \text{且} \ L > L^* := \frac{\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{4Dr - q^2}}{q}\right)}{\frac{\sqrt{4Dr}}{2D}}$$



河流模型

- 记

$$\underline{L} := \inf_{D>0} L^*(D)$$

  - 如果 $L \le \underline{L}$, 则对任何的扩散系数 D, 物种均无法存活;
  - 如果 $L > \underline{L}$, 则存在 $0 < \underline{D} < \overline{D}$ 使得物种存活当且仅当 $D \in (\underline{D}, \overline{D})$. （中庸思想?）

河流模型

- 记
$$\underline{L} := \inf_{D>0} L^*(D)$$
  - 如果 $L \le \underline{L}$, 则对任何的扩散系数 D, 物种均无法存活;
  - 如果 $L > \underline{L}$, 则存在 $0 < \underline{D} < \overline{D}$ 使得物种存活当且仅当 $D \in (\underline{D}, \overline{D})$. （中庸思想?）

- **猜测:** 存在唯一的扩散系数 D^* 是最佳策略：即如果某个种群的扩散系数是 D^*, 那么任何其他物种都不能代替该物种。

- D^*: Nash 均衡点。

最佳扩散策略

- **问题：** 如何确定"最优"的扩散策略？

最佳扩散策略

- 问题： 如何确定"最优"的扩散策略？

- 进化稳定策略 (Evolutionary stable strategy, 简写成ESS)：如果占群体绝大多数的个体选择进化稳定策略，那么小的突变群体无法侵入到这个群体 (J.-M. Smith & N. Price)

最佳扩散策略

- 问题： 如何确定"最优"的扩散策略？
- 进化稳定策略 (Evolutionary stable strategy, 简写成ESS)：如果占群体绝大多数的个体选择进化稳定策略，那么小的突变群体无法侵入到这个群体 (J.-M. Smith & N. Price)
- ESS: 严格 Nash 均衡点

Logistic 模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + u[m(x) - u] \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

- $u(x,t)$: 种群密度
- $m(x)$: 生长率
- α: 扩散率（策略）
- Ω: R^N 中有界区域，封闭边界条件

竞争模型

Dockery et al. (1998, JMB)

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 \Delta u + u[m(x) - u - v] & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ v_t = \alpha_2 \Delta v + v[m(x) - u - v] & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.2}$$

- $u(x,t)$: 策略为 α_1 的"土著" 物种
- $v(x,t)$: 策略为 α_2 的突变物种

竞争模型

Dockery et al. (1998, JMB)

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 \Delta u + u[m(x) - u - v] & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = \alpha_2 \Delta v + v[m(x) - u - v] & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty). \end{cases} \tag{2.2}$$

- $u(x,t)$: 策略为 α_1 的"土著" 物种
- $v(x,t)$: 策略为 α_2 的突变物种
- **问题：** 如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 会发生什么？

以静制动: Evolution of slow movement

以静制动: Evolution of slow movement

定理 (Dockery et al. 1998)

假设 $m > 0$ 为连续非常值函数。如果 $\alpha_2 < \alpha_1$, 则半平凡平衡解 $(0, v^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中 $v^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_2 \Delta v + v\,(m(x) - v) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

以静制动: Evolution of slow movement

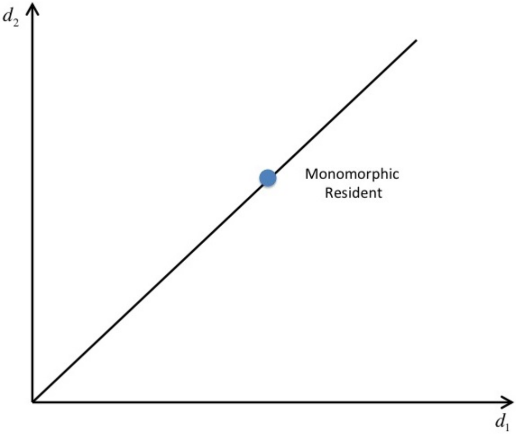
定理（Dockery et al. 1998）

假设 $m>0$ 为连续非常值函数。如果 $\alpha_2<\alpha_1$, 则半平凡平衡解 $(0,v^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中 $v^*>0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_2\Delta v+v\left(m(x)-v\right)=0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

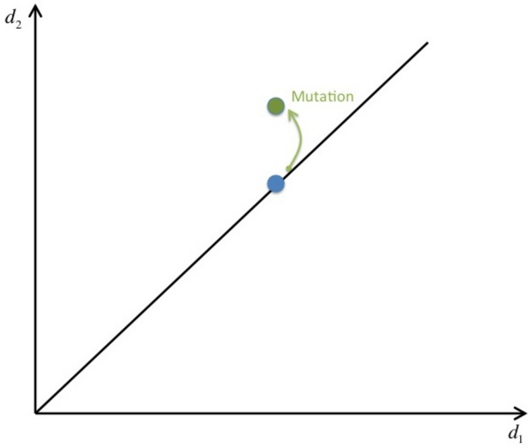
- 扩散策略：尽可能慢一点！

竞争，变异和演变



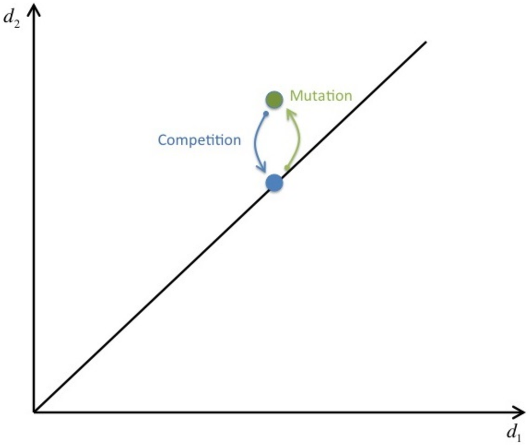
扩散系数的演变

竞争，变异和演变



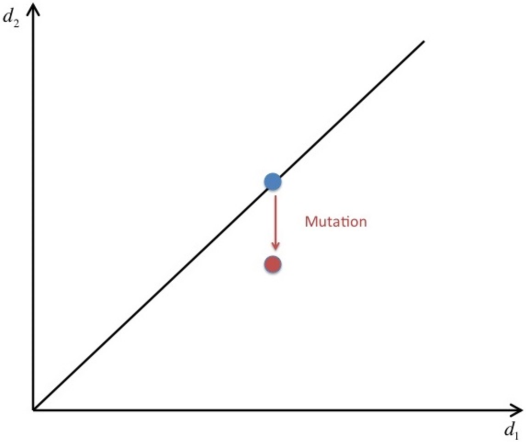
扩散系数的演变

竞争, 变异和演变



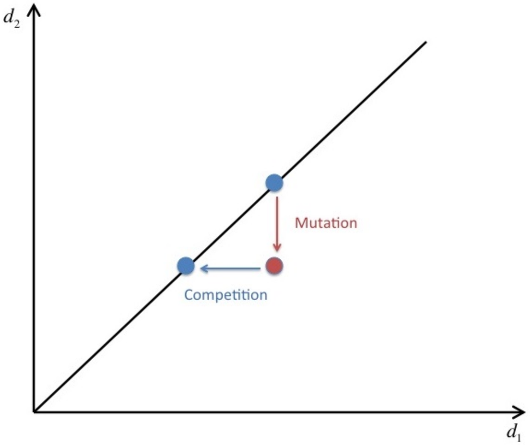
扩散系数的演变

竞争，变异和演变



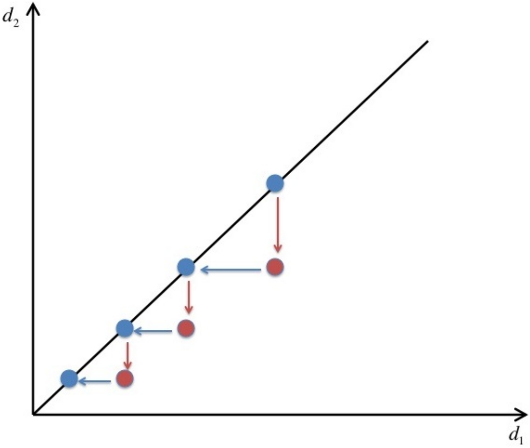
扩散系数的演变

竞争，变异和演变



扩散系数的演变

竞争，变异和演变



扩散系数的演变

单调动力系统理论

单调动力系统理论

- 两物种 Lotka-Volterra 竞争系统是单调的。

单调动力系统理论

- 两物种 Lotka-Volterra 竞争系统是单调的。
- 单调动力系统理论: Hirsch, Matano, Polacik, Takac, Thieme & Smith, Jiang, Dancer & Hess, Hsu, Smith & Waltman, Jiang, 梁兴 & Zhao, 方健 & Zhao...

单调动力系统理论

- 两物种 Lotka-Volterra 竞争系统是单调的。
- 单调动力系统理论: Hirsch, Matano, Polacik, Takac, Thieme & Smith, Jiang, Dancer & Hess, Hsu, Smith & Waltman, Jiang, 梁兴 & Zhao, 方健 & Zhao...
- 半平凡平衡解: $(u^*, 0)$ 和 $(0, v^*)$

单调动力系统理论

- 两物种 Lotka-Volterra 竞争系统是单调的。
- 单调动力系统理论: Hirsch, Matano, Polacik, Takac, Thieme & Smith, Jiang, Dancer & Hess, Hsu, Smith & Waltman, Jiang, 梁兴 & Zhao, 方健 & Zhao...
- 半平凡平衡解： $(u^*, 0)$ 和 $(0, v^*)$
- 如果系统不存在共存平衡解，那么（局部）稳定的半平凡平衡解是全局稳定的。

更多竞争物种

考虑 K-物种竞争系统

$$\begin{cases} u_{i,t} = \alpha_i \Delta u_i + u_i \left(m - \sum_{i=1}^{K} u_i \right) & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases} \tag{2.4}$$

- **问题：** 假设 $m > 0$ 为定义在 $\bar{\Omega}$ 上的非常值函数。如果 $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_K$ 且 $K \geq 3$, 平衡解 $(u^*, 0, ..., 0)$ 全局渐近稳定吗？

该公开问题至今尚未解决，因三个或更多物种的竞争系统非单调。

河流中的扩散策略

河流中的竞争模型:

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\ v_t = \alpha_2 v_{xx} - q v_x + v(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\ \alpha_1 u_x - qu = \alpha_2 v_x - qv = 0 \quad \text{at} \quad x=0,L. \end{cases} \tag{2.5}$$

问题: 如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 会发生什么?

以动制静: Evolution of fast movement

定理

假设 m 为正常数（均匀环境）且 $\alpha_1 > \alpha_2$. 如果半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 存在，则是全局稳定的，其中 $u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u) = 0 \quad 0 < x < L, \\ \alpha_1 u_x(0) - qu(0) = \alpha_1 u_x(L) - qu(L) = 0. \end{cases}$$

以动制静: Evolution of fast movement

定理

假设 m 为正常数（均匀环境）且 $\alpha_1 > \alpha_2$. 如果半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 存在，则是全局稳定的，其中 $u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u) = 0 \quad 0 < x < L, \\ \alpha_1 u_x(0) - q u(0) = \alpha_1 u_x(L) - q u(L) = 0. \end{cases}$$

- 最佳扩散策略：尽可能快一点！

以动制静: Evolution of fast movement

定理

假设 m 为正常数（均匀环境）且 $\alpha_1 > \alpha_2$. 如果半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 存在，则是全局稳定的，其中 $u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u) = 0 & 0 < x < L, \\ \alpha_1 u_x(0) - q u(0) = \alpha_1 u_x(L) - q u(L) = 0. \end{cases}$$

- 最佳扩散策略：尽可能快一点！
- L. & Lutscher (JMB 2014); L. & 周鹏 (JDE 2015)

边界条件的影响

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\ v_t = \alpha_2 v_{xx} - q v_x + v(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\ \alpha_1 u_x - qu = \alpha_2 v_x - qv = 0 \quad \text{at} \quad x=0, \\ u = v = 0 \quad \text{at} \quad x = L. \end{cases}$$

边界条件的影响

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
v_t = \alpha_2 v_{xx} - q v_x + v(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
\alpha_1 u_x - q u = \alpha_2 v_x - q v = 0 & \text{at} \quad x=0, \\
u = v = 0 & \text{at} \quad x=L.
\end{cases}
$$

猜测： 假设 m 为正常数（均匀环境），则存在 $\alpha^* > 0$ 使得若 $\alpha_1 = \alpha^*$ 且 $\alpha_2 \neq \alpha^*$, 半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 是全局渐近稳定的。

边界条件的影响

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
v_t = \alpha_2 v_{xx} - q v_x + v(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
\alpha_1 u_x - q u = \alpha_2 v_x - q v = 0 \quad \text{at} \quad x=0, \\
u = v = 0 \quad \text{at} \quad x = L.
\end{cases}
$$

猜测： 假设 m 为正常数（均匀环境），则存在 $\alpha^* > 0$ 使得若 $\alpha_1 = \alpha^*$ 且 $\alpha_2 \neq \alpha^*$，半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 是全局渐近稳定的。

- 如果扩散速率太小或太大，物种就无法生存。

边界条件的影响

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha_1 u_{xx} - q u_x + u(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
v_t = \alpha_2 v_{xx} - q v_x + v(m-u-v) & 0<x<L,\ t>0, \\
\alpha_1 u_x - qu = \alpha_2 v_x - qv = 0 \quad \text{at} \quad x=0, \\
u = v = 0 \quad \text{at} \quad x = L.
\end{cases}
$$

猜测： 假设 m 为正常数（均匀环境），则存在 $\alpha^* > 0$ 使得若 $\alpha_1 = \alpha^*$ 且 $\alpha_2 \neq \alpha^*$, 半平凡平衡解 $(u^*, 0)$ 是全局渐近稳定的。

- 如果扩散速率太小或太大，物种就无法生存。
- α^* 为进化稳定策略 (ESS).

理想自由分布: Ideal free distribution (IFD)

Fretwell & Lucas (1970): 在栖息地中，物种应该如何分布?

理想自由分布: Ideal free distribution (IFD)

Fretwell & Lucas (1970): 在栖息地中，物种应该如何分布?

- 假设 1：物种对栖息地的评估是“理想的”
- 假设 2：物种可以“自由”移动

理想自由分布: Ideal free distribution (IFD)

Fretwell & Lucas (1970): 在栖息地中，物种应该如何分布?

- 假设 1：物种对栖息地的评估是“理想的”
- 假设 2：物种可以“自由”移动

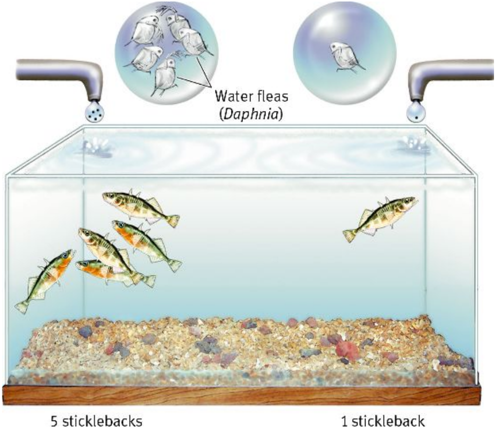
- 预测： 物种的分布与资源分布是成比例的

理想自由分布 (IFD)

- Milinski (1979), 棘鱼的进化稳定饲养策略 *Z. Tierosychol*

理想自由分布 (IFD)

- Milinski (1979), 棘鱼的进化稳定饲养策略 *Z. Tierosychol*



- Logistic 模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha\Delta u + u\left[m(x) - u\right] & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.6}$$

- Logistic 模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + u\,[m(x) - u] \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty). \end{cases} \tag{2.6}$$

- 若 $u(x,0)$ 为正，那么当 $t \to \infty$ 时， $u(x,t) \to u^*(x;\alpha)$

- Logistic 模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha\Delta u + u\,[m(x) - u] \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.6}$$

- 若 $u(x,0)$ 为正，那么当 $t \to \infty$ 时，$u(x,t) \to u^*(x;\alpha)$
- **问题：** u^* 是理想自由分布吗？即

$$\frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} = 常数?$$

Logistic 模型：以静制动

Logistic 模型

$$\begin{cases} \alpha\Delta u^* + u^*(m(x) - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Logistic 模型：以静制动

Logistic 模型

$$
\begin{cases}
\alpha\Delta u^* + u^*(m(x) - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\
\frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布；$\frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。但是...

Logistic 模型：以静制动

Logistic 模型

$$\begin{cases} \alpha\Delta u^* + u^*(m(x) - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布；$\frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。但是...

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} = 1.$$

Logistic 模型：以静制动

Logistic 模型

$$\begin{cases} \alpha\Delta u^* + u^*(m(x) - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布：$\frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。但是...

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{m(x)}{u^*(x;\alpha)} = 1.$$

- 物种扩散速率越小，其分布越接近理想自由分布。

河流模型:以动制静

$u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha u^*_{xx} - q u^*_x + u^*(m - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad (0, L), \\ \alpha u^*_x(0) - q u^*(0) = \alpha u^*_x(L) - q u^*(L) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

河流模型:以动制静

$u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha u^*_{xx} - q u^*_x + u^*(m - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad (0, L), \\ \alpha u^*_x(0) - q u^*(0) = \alpha u^*_x(L) - q u^*(L) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布；$\frac{m}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。若 m 为常数, 则

河流模型:以动制静

$u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha u^*_{xx} - q u^*_x + u^*(m - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad (0, L), \\ \alpha u^*_x(0) - q u^*(0) = \alpha u^*_x(L) - q u^*(L) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布；$\frac{m}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。若 m 为常数, 则

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{m}{u^*(x;\alpha)} = 1.$$

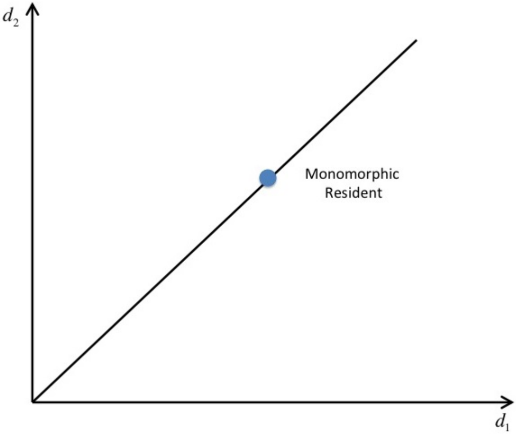
河流模型:以动制静

$u^* > 0$ 满足

$$\begin{cases} \alpha u^*_{xx} - q u^*_x + u^*(m - u^*) = 0 \quad \text{in} \quad (0, L), \\ \alpha u^*_x(0) - q u^*(0) = \alpha u^*_x(L) - q u^*(L) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

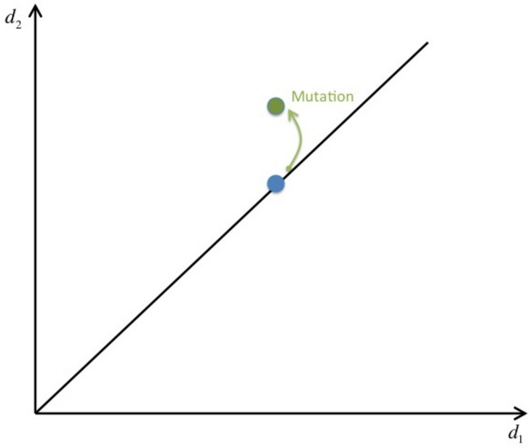
- 对 $\alpha > 0$ 无理想自由分布; $\frac{m}{u^*(x;\alpha)} \neq$ 常数。若 m 为常数, 则
$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{m}{u^*(x;\alpha)} = 1.$$
- 物种扩散速率越大，其分布越接近理想自由分布。

竞争和变异



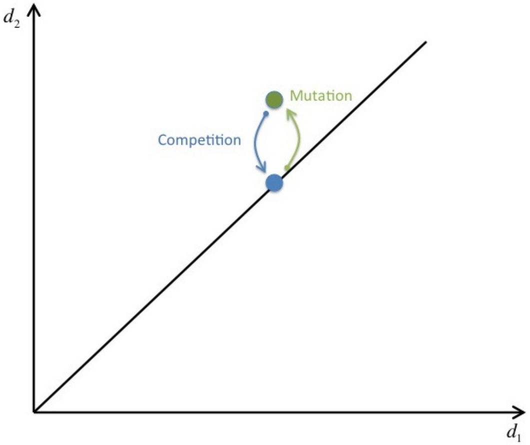
扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

竞争和变异



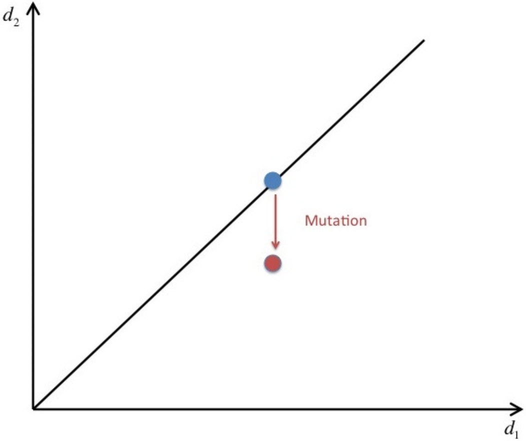
扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

竞争和变异



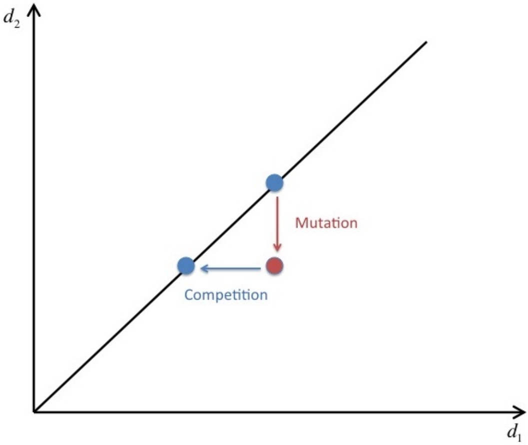
扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

竞争和变异



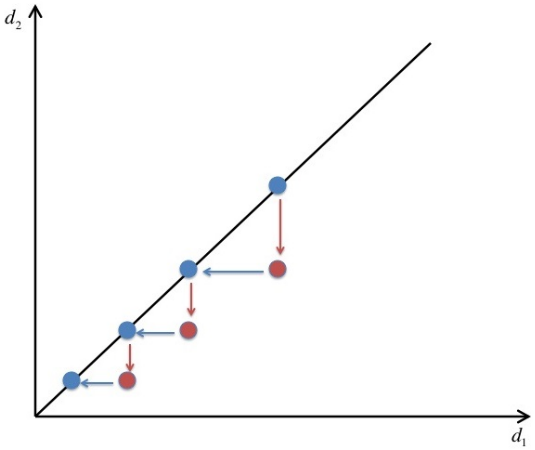
扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

竞争和变异



扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

竞争和变异



扩散系数的演变: 竞争和变异互为独立

Perthame-Souganidis 连续种群模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha\Delta_x u + u[m(x) - \hat{u}] + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} & \text{in } \Omega \times (\underline{\alpha}, \overline{\alpha}) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (\underline{\alpha}, \overline{\alpha}) \times (0, \infty), \\ u_\alpha = 0 \quad \alpha = \underline{\alpha}, \overline{\alpha}. \end{cases} \tag{3.1}$$

- $u(x, \alpha, t)$: 策略为 α 的物种密度
- $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$: $0 < \underline{\alpha} < \overline{\alpha}$
- $\epsilon^2 u_{\alpha\alpha}$: 种群变异
- 所有物种的总密度: $\hat{u}(x, t) = \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x, \alpha', t)\, d\alpha'$

渐近行为

问题： 当 $\epsilon \to 0$ 时，平衡解 $u_\epsilon(x,\alpha)$ 的渐近行为？

$$\alpha \Delta_x u + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u\left[m(x) - \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x,\alpha')\, d\alpha'\right] = 0.$$

渐近行为

问题： 当 $\epsilon \to 0$ 时，平衡解 $u_\epsilon(x,\alpha)$ 的渐近行为？

$$\alpha \Delta_x u + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u \left[m(x) - \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x,\alpha')\, d\alpha' \right] = 0.$$

回答：

- $m \equiv C$ 时: $u_\epsilon(x,\alpha) \equiv C/(\overline{\alpha} - \underline{\alpha})$, $\forall \epsilon > 0$.

渐近行为

问题： 当 $\epsilon \to 0$ 时，平衡解 $u_\epsilon(x,\alpha)$ 的渐近行为？

$$\alpha \Delta_x u + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u \left[m(x) - \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x,\alpha')\, d\alpha' \right] = 0.$$

回答：

- $m \equiv C$ 时: $u_\epsilon(x,\alpha) \equiv C/(\overline{\alpha} - \underline{\alpha})$, $\forall \epsilon > 0$.
- m 非常值函数: 当 $\epsilon \to 0$ 时，在分布意义下

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to u^*(x,\underline{\alpha}) \cdot \delta(\alpha - \underline{\alpha})$$

渐近行为

问题： 当 $\epsilon \to 0$ 时，平衡解 $u_\epsilon(x,\alpha)$ 的渐近行为？

$$\alpha\Delta_x u + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u\left[m(x) - \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x,\alpha')\,d\alpha'\right] = 0.$$

回答：

- $m \equiv C$ 时: $u_\epsilon(x,\alpha) \equiv C/(\overline{\alpha} - \underline{\alpha})$, $\forall \epsilon > 0$.
- m 非常值函数: 当 $\epsilon \to 0$ 时，在分布意义下

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to u^*(x,\underline{\alpha}) \cdot \delta(\alpha - \underline{\alpha})$$

  - $\epsilon = 0$: 任意 $\alpha_0 \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, $u^*(x,\alpha_0) \cdot \delta(\alpha - \alpha_0)$ 是平衡解。
  - $\epsilon > 0$ 且充分小: 平衡解 u_ϵ 是唯一的 (Lam, 2017 CVPDE).

物种集聚现象

定理（Lam & L., JFA 2017)

存在 $C_1 > 0$, 独立于 $\epsilon > 0$, 使得

$$u_\epsilon(x,\alpha) \le C_1 \epsilon^{-2/3} \exp\left(-\frac{\alpha-\underline{\alpha}}{\epsilon^{2/3}}\right).$$

并且，当 $\epsilon \to 0$ 时，

$$\left\| \epsilon^{2/3} u_\epsilon(x,\alpha) - u^*(x,\underline{\alpha}) \cdot \eta^* \left(\frac{\alpha-\underline{\alpha}}{\epsilon^{2/3}}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega\times(\underline{\alpha},\overline{\alpha}))} \to 0$$

其中 $\eta^*(s) = C_2\,\mathsf{Airy}(C_3 s - C_4)$, $C_i > 0$.

物种集聚现象

定理 (Lam & L., JFA 2017)

存在 $C_1 > 0$, 独立于 $\epsilon > 0$, 使得

$$u_\epsilon(x,\alpha) \le C_1 \epsilon^{-2/3} \exp\left(-\frac{\alpha - \underline{\alpha}}{\epsilon^{2/3}}\right).$$

并且，当 $\epsilon \to 0$ 时，

$$\left\| \epsilon^{2/3} u_\epsilon(x,\alpha) - u^*(x,\underline{\alpha}) \cdot \eta^* \left(\frac{\alpha - \underline{\alpha}}{\epsilon^{2/3}}\right) \right\|_{L^\infty(\Omega \times (\underline{\alpha},\overline{\alpha}))} \to 0$$

其中 $\eta^*(s) = C_2 \,\mathsf{Airy}(C_3 s - C_4)$, $C_i > 0$.

- 在分布意义下，当 $\epsilon \to 0$ 时

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to u^*(x,\underline{\alpha}) \cdot \delta(\alpha - \underline{\alpha}).$$

Perthame & Souganidis

Perthame & Souganidis (2016)

$$\begin{cases} \alpha(\tau)\Delta_x u + \epsilon^2 u_{\tau\tau} + u(m(x) - \hat{u}) = 0 & \text{in } \Omega \times [0,1], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,1], \\ u \text{ is 1-periodic in } \tau, \end{cases}$$

Ω : 有界光滑凸区域；$\alpha(\tau)$ 是关于 τ 周期为 1 的正函数。

Perthame & Souganidis

Perthame & Souganidis (2016)

$$\begin{cases} \alpha(\tau)\Delta_x u + \epsilon^2 u_{\tau\tau} + u(m(x) - \hat{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0,1], \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,1], \\ u \text{ is 1-periodic in } \tau, \end{cases}$$

Ω : 有界光滑凸区域；$\alpha(\tau)$ 是关于 τ 周期为 1 的正函数。

- Perthame & Souganidis 证明在分布意义下, 当 $\epsilon \to 0$ 时

$$u(x,\tau) \to u^*(x,\alpha_*) \cdot \delta(\tau - \alpha(\tau_*)),$$

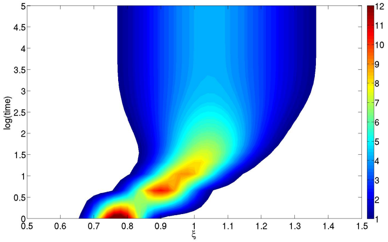
其中 $\alpha(\tau_*) = \min_{0\le\tau\le1} \alpha(\tau)$.

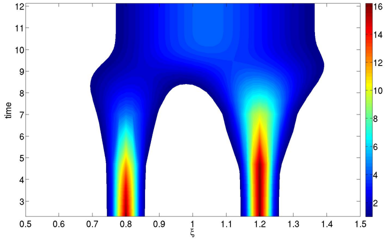
河流模型：数值模拟结果一

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} - u_x + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u(m - \hat{u}) & x \in (0,1), \alpha \in (0.5, 1.5) \\ \alpha u_x - u = 0 & x = 0, 1,\ \ t > 0 \\ u = 0 & \alpha = 0.5, 1.5,\ \ t > 0 \end{cases}$$

模拟 $\int_0^1 u(x,\alpha,t)dx$ 对 α 的依赖性：

$$m(x) = e^{(1-a)x + ax^2}, \quad \epsilon = 10^{-3}, \quad a = -1/4$$





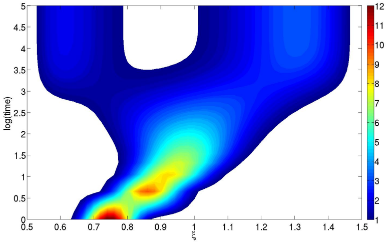
河流模型：数值模拟结果二

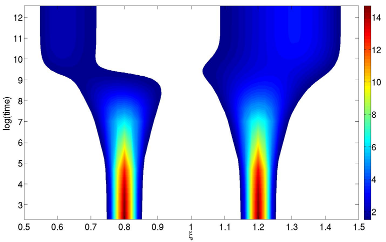
考虑如下方程，

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} - u_x + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} + u(m - \hat{u}) & x \in (0,1), \alpha \in (0.5, 1.5) \\ \alpha u_x - u = 0 & x = 0, 1, \ t > 0 \\ u = 0 & \alpha = 0.5, 1.5, \ t > 0 \end{cases}$$

模拟 $\int_0^1 u(x, \alpha, t)dx$ 关于 α 的依赖性：

$$m(x) = e^{(1-a)x + ax^2}, \quad \epsilon = 10^{-3}, \quad a = 1/4$$





扩散策略

记 $u = u(x, \alpha, t)$:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} - u_x + u(m(x) - \hat{u}) + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} & x \in [0, L], \alpha \in \mathcal{I} \\ \alpha u_x - u = 0 & x = 0, L, \alpha \in \mathcal{I} \\ u = 0 & x \in (0, L), \alpha = \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{I} = (\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, $\hat{u}(x, t) = \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x, \alpha, t)\, d\alpha.$

扩散策略

记 $u = u(x, \alpha, t)$:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} - u_x + u(m(x) - \hat{u}) + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} & x \in [0, L], \alpha \in \mathcal{I} \\ \alpha u_x - u = 0 & x = 0, L, \alpha \in \mathcal{I} \\ u = 0 & x \in (0, L), \alpha = \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{I} = (\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, $\hat{u}(x, t) = \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x, \alpha, t)\, d\alpha$.

- 对任意 ϵ 及 $u_0(x, \alpha) \in C([0, L] \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, 解全局存在。

扩散策略

记 $u = u(x, \alpha, t)$:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} - u_x + u(m(x) - \hat{u}) + \epsilon^2 u_{\alpha\alpha} & x \in [0, L], \alpha \in \mathcal{I} \\ \alpha u_x - u = 0 & x = 0, L, \alpha \in \mathcal{I} \\ u = 0 & x \in (0, L), \alpha = \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{I} = (\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, $\hat{u}(x, t) = \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} u(x, \alpha, t)\, d\alpha$.

- 对任意 ϵ 及 $u_0(x, \alpha) \in C([0, L] \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, 解全局存在。
- **问题:** 当 $\epsilon \to 0$ 时，平衡解 $u_\epsilon(x, \alpha)$ 的渐近行为?

单个方程

单物种模型

$$\begin{cases} \theta_t = \alpha\theta_{xx} - \theta_x + \theta(m(x) - \theta) & 0 < x < L, t > 0 \\ \alpha\theta_x - \theta = 0 & x = 0, L, t > 0 \end{cases}$$

- $m(x) > 0$: Hölder 连续
- 对任意 $\alpha > 0$, 存在唯一的正稳态解: $\theta_\alpha(x)$

两物种竞争模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 u_{xx} - u_x + u(m-u-v) & x \in (0,L), t > 0 \\ v_t = \alpha_2 v_{xx} - v_x + v(m-u-v) & x \in (0,L), t > 0 \\ \text{封闭边界条件} & \end{cases}$$

两物种竞争模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 u_{xx} - u_x + u(m-u-v) & x \in (0,L), t>0 \\ v_t = \alpha_2 v_{xx} - v_x + v(m-u-v) & x \in (0,L), t>0 \\ \text{封闭边界条件} & \end{cases}$$

- $(\theta_{\alpha_1}, 0)$ 的稳定性: 主特征值 $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2)$ 的符号,

$$\begin{cases} \alpha_2 \varphi_{xx} - \varphi_x + (m - \theta_{\alpha_1})\varphi = \lambda\varphi & x \in (0,L), \\ \alpha_2 \varphi_x - \varphi = 0 & x = 0, L \end{cases}$$

两物种竞争模型

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 u_{xx} - u_x + u(m-u-v) & x \in (0,L), t>0 \\ v_t = \alpha_2 v_{xx} - v_x + v(m-u-v) & x \in (0,L), t>0 \\ \text{封闭边界条件} \end{cases}$$

- $(\theta_{\alpha_1}, 0)$ 的稳定性: 主特征值 $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2)$ 的符号,

$$\begin{cases} \alpha_2 \varphi_{xx} - \varphi_x + (m - \theta_{\alpha_1})\varphi = \lambda\varphi & x \in (0,L), \\ \alpha_2 \varphi_x - \varphi = 0 & x = 0, L \end{cases}$$

- 对所有 $\hat{\alpha}$, $\lambda(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) \equiv 0$ 且

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2) \begin{cases} > 0 & (\theta_{\alpha_1}, 0) \text{ 不稳定} \\ < 0 & (\theta_{\alpha_1}, 0) \text{ 稳定} \end{cases}$$

博弈论

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$: 策略 α_2 的回报, 三种情况

- 极端的策略（单边 Dirac Mass）

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) \neq 0$$

- 进化稳定策略（内部 Dirac Mass）

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha_2^2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) < 0$$

- 进化分支点（双边 Dirac Mass）

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha_2^2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) > 0$$

Case 1: $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2} \neq 0$ - 单边 Dirac

定理 (Hao, Lam & L., Indiana Univ. Math J.)

如果 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) < 0$, $\hat{\alpha} \in \mathcal{I} = (\underline{\alpha},\overline{\alpha})$，且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则任意正平衡解 $u_\epsilon : \Omega \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ 在分布意义下满足

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to \delta_0(\alpha - \underline{\alpha}) \cdot \theta_{\underline{\alpha}}(x) \quad 当 \ \epsilon \to 0;$$

即, 扩散越小越好。

- 类似地，如果 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) > 0$, 则正解 u_ϵ 集中于 $\overline{\alpha}$, 即扩散越快越好。

Case 2: 收敛稳定策略

定义

称 $\hat{\alpha}$ 是一个收敛稳定策略 *(convergence stable strategy)*, 如果

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = 0 \text{ 且 } \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2}(s, s)\right]\bigg|_{s=\hat{\alpha}} < 0.$$

Case 2: 收敛稳定策略

定义

称 $\hat{\alpha}$ 是一个收敛稳定策略 *(convergence stable strategy)*, 如果

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) = 0 \text{ 且 } \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(s,s)\right]\Big|_{s=\hat{\alpha}} < 0.$$

两种子情况:

- Case 2A: 进化稳定策略(ESS):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) = 0,\ \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(s,s)\right]\Big|_{s=\hat{\alpha}} < 0, \text{ 且}$$
$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha_2^2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) < 0.$$

- Case 2B: 进化分支点(BP):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) = 0,\ \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}(s,s)\right]\Big|_{s=\hat{\alpha}} < 0, \text{ 且}$$
$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha_2^2}(\hat{\alpha},\hat{\alpha}) > 0.$$

Case 2A: 进化稳定策略(ESS)

- 称 $\hat{\alpha}$ 为 ESS, 如果它不能被任何不同的策略 $\alpha \neq \hat{\alpha}$ 所入侵，即

$$对所有\ \alpha \approx \hat{\alpha}\ 但\ \alpha \neq \hat{\alpha},\ 有\ \lambda(\hat{\alpha}, \alpha) < 0.$$

Case 2A: 进化稳定策略(ESS)

- 称 $\hat{\alpha}$ 为 ESS, 如果它不能被任何不同的策略 $\alpha \neq \hat{\alpha}$ 所入侵，即

$$\text{对所有 } \alpha \approx \hat{\alpha} \text{ 但 } \alpha \neq \hat{\alpha}, \text{有 } \lambda(\hat{\alpha}, \alpha) < 0.$$

- **问题：** $\hat{\alpha}$ 能否在无限多策略 α 中占据优势?

Case 2A: 进化稳定策略(ESS)

- 称 $\hat{\alpha}$ 为 ESS, 如果它不能被任何不同的策略 $\alpha \neq \hat{\alpha}$ 所入侵，即

$$\text{对所有 } \alpha \approx \hat{\alpha} \text{ 但 } \alpha \neq \hat{\alpha}, \text{有 } \lambda(\hat{\alpha}, \alpha) < 0.$$

- **问题：** $\hat{\alpha}$ 能否在无限多策略 α 中占据优势?

定理（Hao, Lam & L. 2017)

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *ESS*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则任意正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足

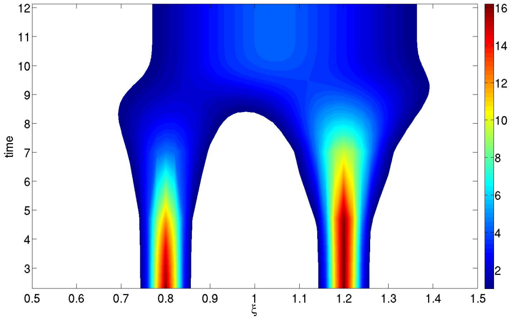
$$u_\epsilon(x, \alpha) \to \delta_0(\alpha - \hat{\alpha}) \cdot \theta_{\hat{\alpha}}(x) \ \text{ 当 } \epsilon \to 0.$$

Case 2A: 进化稳定策略(ESS)

定理 (Hao, Lam & L. 2017)

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *ESS*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则任意正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to \delta_0(\alpha - \hat{\alpha}) \cdot \theta_{\hat{\alpha}}(x) \quad 当 \ \epsilon \to 0.$$



Case 2B: 进化分支点(BP)

定理 (Hao, Lam & L. 2017)

Case 2B: 进化分支点(BP)

定理（Hao, Lam & L. 2017)

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *BP*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足, 当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$u_\epsilon(x, \alpha) \to \delta_0(\alpha - \underline{\alpha}) \cdot u_1(x) + \delta_0(\alpha - \overline{\alpha}) \cdot u_2(x).$$

Case 2B: 进化分支点(BP)

定理 (Hao, Lam & L. 2017)

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *BP*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足, 当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to \delta_0(\alpha - \underline{\alpha}) \cdot u_1(x) + \delta_0(\alpha - \overline{\alpha}) \cdot u_2(x).$$

其中 (u_1, u_2) 满足

$$\begin{cases} \underline{\alpha} u_{1,xx} - u_{1,x} + u_1(m - u_1 - u_2) = 0 & x \in (0,L), \\ \overline{\alpha} u_{2,xx} - u_{2,x} + u_2(m - u_1 - u_2) = 0 & x \in (0,L), \\ \underline{\alpha} u_{1,x} - u_1 = \overline{\alpha} u_{2,x} - u_2 = 0 & x = 0, L. \end{cases}$$

Case 2B: 进化分支点(BP)

定理（Hao, Lam & L. 2017）

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *BP*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足, 当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$u_\epsilon(x,\alpha) \to \delta_0(\alpha - \underline{\alpha}) \cdot u_1(x) + \delta_0(\alpha - \overline{\alpha}) \cdot u_2(x).$$

其中 (u_1, u_2) 满足

$$\begin{cases} \underline{\alpha} u_{1,xx} - u_{1,x} + u_1(m - u_1 - u_2) = 0 & x \in (0,L), \\ \overline{\alpha} u_{2,xx} - u_{2,x} + u_2(m - u_1 - u_2) = 0 & x \in (0,L), \\ \underline{\alpha} u_{1,x} - u_1 = \overline{\alpha} u_{2,x} - u_2 = 0 & x = 0, L. \end{cases}$$

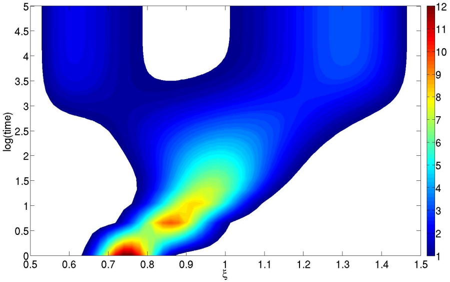
- **结论：** 在进化分支点附近，没有任何策略 α 占据绝对优势。相反，两种极端的策略 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$ 形成了一个联盟，共同主导着竞争。为什么?

Case 2B: 进化分支点(BP)

定理 (Hao, Lam & L. 2017)

假设 $\hat{\alpha}$ 为 *BP*. 如果 $\hat{\alpha} \in \mathcal{I}$ 且 $|\mathcal{I}|$ 充分小，则正平衡解 u_ϵ 在分布意义下满足, 当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$u_\epsilon(x, \alpha) \to \delta_0(\alpha - \underline{\alpha}) \cdot u_1(x) + \delta_0(\alpha - \overline{\alpha}) \cdot u_2(x).$$



相关数学工具

- 反应扩散方程, 非局部方程, 单调动力系统, 变分法, 最优控制, Hamilton-Jacobi 方程, 椭圆算子特征值理论

- 理想自由分布, 空间博弈论, 竞争-变异模型

主特征值: Principal eigenvalue

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + A\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

主特征值: Principal eigenvalue

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + A\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\mathbf{v}(x)$: C^1 向量场; $c(x) \in C(\bar{\Omega})$

主特征值: Principal eigenvalue

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + A\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\mathbf{v}(x)$: C^1 向量场; $c(x) \in C(\bar{\Omega})$
- $\min_{\bar{\Omega}} c \le \lambda(A) \le \max_{\bar{\Omega}} c$

主特征值: Principal eigenvalue

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + A\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\mathbf{v}(x)$: C^1 向量场; $c(x) \in C(\bar{\Omega})$
- $\min_{\bar{\Omega}} c \leq \lambda(A) \leq \max_{\bar{\Omega}} c$
- 关键：$\lambda(A)$ 的符号

已有工作

- Dirichlet 边值条件: Wentzell (75), Devinatz, Ellis, Friedman (73/74), Berestycki, Hamel 及 Nadirashvili (05)...

已有工作

- Dirichlet 边值条件: Wentzell (75), Devinatz, Ellis, Friedman (73/74), Berestycki, Hamel 及 Nadirashvili (05)...
- 非均匀介质中行波传播：Xin(92,02), Fannjiang and Papanicolaou (94), Wentzell 及 Freidlin (98)...

已有工作

- Dirichlet 边值条件: Wentzell (75), Devinatz, Ellis, Friedman (73/74), Berestycki, Hamel 及 Nadirashvili (05)...
- 非均匀介质中行波传播：Xin(92,02), Fannjiang and Papanicolaou (94), Wentzell 及 Freidlin (98)...
- 流体中火焰的传播/熄灭：Constantin, Kiselev, Ryzhik, Zlatos...

已有工作

- Dirichlet 边值条件: Wentzell (75), Devinatz, Ellis, Friedman (73/74), Berestycki, Hamel 及 Nadirashvili (05)...
- 非均匀介质中行波传播：Xin(92,02), Fannjiang and Papanicolaou (94), Wentzell 及 Freidlin (98)...
- 流体中火焰的传播/熄灭：Constantin, Kiselev, Ryzhik, Zlatos...
- 河流生态系统：Lutscher, Lewis...

流的分解

- Hodge 分解:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \nabla b,$$

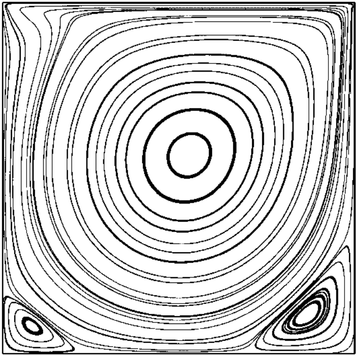
其中 $\nabla \cdot \mathbf{v_0} = 0$, $\mathbf{v_0} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ 为不可压缩流。

流的分解

- Hodge 分解:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \nabla b,$$

其中 $\nabla \cdot \mathbf{v_0} = 0$, $\mathbf{v_0} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ 为不可压缩流。



不可压缩流

定理 (Berestycki, Hamel & Nadirashvili (CMP 2005))

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则

$$\lim_{A\to\infty} \lambda(A) = \inf_{\varphi\in\mathcal{I}} \frac{\int_\Omega (|\nabla\varphi|^2 + c(x)\varphi^2)}{\int_\Omega \varphi^2},$$

不可压缩流

定理 (Berestycki, Hamel & Nadirashvili (CMP 2005))

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则

$$\lim_{A\to\infty}\lambda(A)=\inf_{\varphi\in\mathcal{I}}\frac{\int_\Omega(|\nabla\varphi|^2+c(x)\varphi^2)}{\int_\Omega\varphi^2},$$

其中 $\mathcal{I}=\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi\neq 0,\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi=0\text{ a.e. in }\Omega\}$.

不可压缩流

定理 (Berestycki, Hamel & Nadirashvili (CMP 2005))

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则

$$\lim_{A\to\infty} \lambda(A) = \inf_{\varphi\in\mathcal{I}} \frac{\int_\Omega (|\nabla\varphi|^2 + c(x)\varphi^2)}{\int_\Omega \varphi^2},$$

其中 $\mathcal{I} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi \neq 0, \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi = 0 \text{ a.e. in } \Omega\}$.

- 易见，

$$\lambda(0) \leq \lambda(A) \leq \lim_{A\to\infty} \lambda(A).$$

不可压缩流

定理 (Berestycki, Hamel & Nadirashvili (CMP 2005))

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则

$$\lim_{A\to\infty}\lambda(A)=\inf_{\varphi\in\mathcal{I}}\frac{\int_\Omega(|\nabla\varphi|^2+c(x)\varphi^2)}{\int_\Omega\varphi^2},$$

其中 $\mathcal{I}=\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi\neq 0, \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi=0 \text{ a.e. in } \Omega\}.$

- 易见，

$$\lambda(0)\le\lambda(A)\le\lim_{A\to\infty}\lambda(A).$$

- **问题：** $\lambda(A)$ 关于 A 单调吗?

$\lambda(A)$ 的单调性

定理（刘爽 & L. 2017)

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则 $\frac{\partial\lambda}{\partial A} \geq 0 \ \forall\ A \geq 0$. 并且，

- 若 $\nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{v} \not\equiv \mathbf{0}$, 则 $\frac{\partial\lambda}{\partial A}(A) > 0 \ \forall\ A > 0$;
- 若 $\nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, 则 $\lambda(A) \equiv \lambda(0) \ \forall\ A > 0$.

$\lambda(A)$ 的单调性

定理（刘爽 & L. 2017）

假设 $\mathbf{v}$ 为不可压缩流，则 $\frac{\partial\lambda}{\partial A} \geq 0 \ \forall\ A \geq 0$. 并且，

- 若 $\nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{v} \not\equiv \mathbf{0}$, 则 $\frac{\partial\lambda}{\partial A}(A) > 0 \ \forall\ A > 0$;
- 若 $\nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, 则 $\lambda(A) \equiv \lambda(0) \ \forall\ A > 0$.

其中 φ_0 满足

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0 + c(x)\varphi_0 = \lambda(0)\varphi_0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi_0 > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m \cdot \nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\lambda(A)$ 关于 A 一般不单调。

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\lambda(A)$ 关于 A 一般不单调。

定理 (Chen & L. (Indiana Math Univ. J, 2008))

假设 $m \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 m 的所有极值点非退化，则

$$\lim_{A\to\infty} \lambda(A) = \min_{x\in\mathcal{M}} c(x),$$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- $\lambda(A)$ 关于 A 一般不单调。

定理 (Chen & L. (Indiana Math Univ. J, 2008))

假设 $m \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 m 的所有极值点非退化，则

$$\lim_{A\to\infty} \lambda(A) = \min_{x\in\mathcal{M}} c(x),$$

其中 $\mathcal{M}$ 是由 m 的局部极大值点构成的集合。

退化情况, 公开问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

退化情况, 公开问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- 彭锐和周茂林研究了退化情形 (Indiana Univ. Math J., to appear): $\Omega = (0,1)$ 且 $m(x)$ 的极值点可以包含多个小区间。

退化情况, 公开问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - A\nabla m\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(A)\varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- 彭锐和周茂林研究了退化情形 (Indiana Univ. Math J., to appear): $\Omega = (0,1)$ 且 $m(x)$ 的极值点可以包含多个小区间。
- **问题：** 对一般的 $\mathbf{v}$: $\lim_{A\to\infty} \lambda(A)$ 存在吗？若存在，极限是什么？

特征值和扩散系数

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

特征值和扩散系数

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$\mathbf{v} = 0:$

特征值和扩散系数

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$\mathbf{v} = 0:$

- $\lambda(D)$ 关于 D 单调增加

特征值和扩散系数

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$\mathbf{v} = 0:$

- $\lambda(D)$ 关于 D 单调增加
- $\lim_{D\to 0} \lambda(D) = \min_{\bar{\Omega}} c(x)$

特征值和扩散系数

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$\mathbf{v} = 0$:

- $\lambda(D)$ 关于 D 单调增加
- $\lim_{D\to 0} \lambda(D) = \min_{\bar{\Omega}} c(x)$
- $\lim_{D\to +\infty} \lambda(D) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega c(x)$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

定理 (Chen & L. (Indiana Univ. Math J. 2012))

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

定理 (Chen & L. (Indiana Univ. Math J. 2012))

假设在 $\partial\Omega$ 上 $|\nabla m| \neq 0$ 且 m 的所有极值点非退化，则

$$\lim_{D\to 0} \lambda(D) = \inf_{x\in\Sigma_1\cup\Sigma_2} \left\{ c(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x) \Big) \right\}.$$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

定理 (Chen & L. (Indiana Univ. Math J. 2012))

假设在 $\partial\Omega$ 上 $|\nabla m| \neq 0$ 且 m 的所有极值点非退化，则

$$\lim_{D\to 0} \lambda(D) = \inf_{x\in\Sigma_1\cup\Sigma_2} \left\{ c(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x) \Big) \right\}.$$

其中

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \{x \in \Omega : |\nabla m(x)| = 0\}; \\ \Sigma_2 = \{x \in \partial\Omega : |\nabla m(x)| = \nabla m(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}. \end{cases}$$

势流: $\mathbf{v} = -\nabla m$:

定理 (Chen & L. (Indiana Univ. Math J. 2012))

假设在 $\partial\Omega$ 上 $|\nabla m| \neq 0$ 且 m 的所有极值点非退化，则

$$\lim_{D\to 0} \lambda(D) = \inf_{x\in\Sigma_1\cup\Sigma_2} \left\{ c(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(|\kappa_i(x)| + \kappa_i(x) \Big) \right\}.$$

其中

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \{x \in \Omega : |\nabla m(x)| = 0\}; \\ \Sigma_2 = \{x \in \partial\Omega : |\nabla m(x)| = \nabla m(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}. \end{cases}$$

- 当 $x \in \Omega$ 时，$\kappa_i(x)$ 为 $D^2 m(x)$ 的第 i 个特征值；
- 当 $x \in \partial\Omega$ 时，$\kappa_i(x)$ 为 $D^2 m_{\partial\Omega}(x)$ 的第 i 个特征值，其中 $m_{\partial\Omega}(x)$ 为 $m(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上的限制。

公开问题

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- 不可压缩流 $\mathbf{v}$:

公开问题

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- 不可压缩流 $\mathbf{v}$： $\lambda(D)$ 关于 D 单调增加吗？

公开问题

$$\begin{cases} -D\Delta\varphi + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + c(x)\varphi = \lambda(D)\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \varphi > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- 不可压缩流 $\mathbf{v}$： $\lambda(D)$ 关于 D 单调增加吗？
- 一般的 $\mathbf{v}$: $\lambda(D)$ 关于小扩散 D 的渐近行为?

相关课题

- 最小波速： Berestycki, Hamel, Nadirashvili, J. Eur. Math. Soc., 2005

相关课题

- 最小波速： Berestycki, Hamel, Nadirashvili, J. Eur. Math. Soc., 2005
- 不可压缩流强化混合 (Enhanced mixing): Constantin, Kiselev, Ryzhik, Zlatoš, Ann. Math, 2008

相关课题

- 最小波速： Berestycki, Hamel, Nadirashvili, J. Eur. Math. Soc., 2005
- 不可压缩流强化混合 (Enhanced mixing): Constantin, Kiselev, Ryzhik, Zlatoš, Ann. Math, 2008
- 特征值的重排 (rearrangement) 不等式： Hamel, Nadirashvili, Russ, Ann. Math, 2012

谢谢!