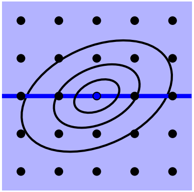
丢番图方程，算术几何与凸分析

陈华一 (法国巴黎大学 IMJ-PRG 研究所)



中国科学院数学研究所报告，2019 年 9 月 4 日

数学研究数与形

数学研究数与形

数： 数系及衍生集合 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}, \ldots$)

数学研究数与形

数：数系及衍生集合 ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$)

形：结构与关系 (拓扑，度量，作用，序 ...)

数学研究数与形

数：数系及衍生集合 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}, \ldots$)

形：结构与关系 (拓扑，度量，作用，序 . . .)

- 古典数学中数与形是相对独立的研究对象
- 现代数学的趋势：数与形的高度结合
  (笛卡尔坐标法，抽象代数，代数几何，. . .)

什么是丢番图方程?

丢番图方程组

- 整系数多项式方程组
- 研究方程组的整数解或有理数解
  (存在性，有限性，稠密性，...)

例

$$x^4 - y^4 - 2x^2y + 1 = 0 \quad \text{和} \quad \begin{cases} x^2 + yz + z + 1 = 0, \\ x^3 + y^2 + 12345z^3 = 0 \end{cases}$$

都只有有限组有理数解.

几何解释

它们都定义了亏格 $\geqslant 2$ 的曲线.

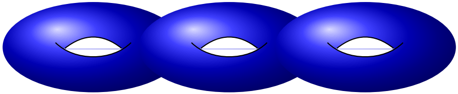
Mordell 猜想，Bombieri-Lang 猜想

Bombieri-Lang 猜想

倘若一组丢番图方程定义了一个射影簇，其最高阶外形式丛是大线丛，那么该射影簇的有理点集在 Zariski 拓扑下不是稠密的.

一维情形：Mordell 猜想 (1922)，Faltings 定理 (1985)

倘若一组丢番图方程定义了亏格 $\geqslant 2$ 的代数曲线，那么该方程只有有限多组有理数解.



用几何语言描述 Diophantus 方程

射影簇，有理点，...

语言的转换

射影簇

设 A 为交换幺环.

- $N+1$ 元 d 次 A 系数齐次多项式

$$P(T_0,\dots,T_N)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N+1},\ |\alpha|=d}\xi_\alpha T^\alpha,\quad \xi_\alpha\in A,$$

$$\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^{N+1},\quad |\alpha|:=\alpha_0+\cdots+\alpha_N,\ T^\alpha:=T_0^{\alpha_0}\cdots T_N^{\alpha_N}.$$

- $\mathbb{P}_A^N$ 的闭子簇: 一族 $N+1$ 元 A 系数齐次多项式.
- 射影空间$\mathbb{P}_A^N$: 零多项式族.
- A 上的射影簇: 某个 $\mathbb{P}_A^N$ 的闭子簇.

射影簇的理想，坐标环与维数

设 K 为域，X 为 $\mathbb{P}_K^N$ 的闭子簇.

- 令 I_X 为 X 中的多项式生成的 $K[T_0, \ldots, T_N]$ 的理想.
- I_X 是齐次理想：

$$I_X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_{X,n}.$$

- 令 R_X 为商环 $K[T_0, \ldots, T_N]/I_X$，称为 X 的坐标环.

$$R_X \text{ 是分次 } K\text{-代数：} \ R_X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_{X,n}.$$

- 射影簇 X 的维数定义为

$$\dim(X) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log(\mathrm{rk}_K(R_{X,n}))}{\log(n)}.$$

若 $\dim(X) = 1$，称 X 为射影曲线.

例

- 令 $K[T_0, \ldots, T_N]_n$ 为 n 次齐次多项式构成的线性空间.
$$\mathrm{rk}_K(K[T_0, \ldots, T_n]_n) = \binom{N+n}{N},$$
从而 $\dim(\mathbb{P}^N_K) = N$.
- 设 X 是某 d 次齐次多项式 F 定义的 $\mathbb{P}^N_K$ 的闭子簇. 那么 $I_X = FK[T_0, \ldots, T_N]$. 从而当 n 足够大时
$$\mathrm{rk}_K(R_{X,n}) = \binom{N+n}{n} - \binom{N+n-d}{N}.$$
所以 $\dim(X) = N - 1$.

算术射影簇

算术射影簇: $\mathbb{Z}$ 上的射影簇 $\mathscr{X}$.

- 对任意交换幺环 A, $\mathscr{X}$ 诱导 A 上的射影簇 $\mathscr{X}_A$.
- 设 K 为域,

$$\widetilde{\mathscr{X}}(K) = \{x = (x_0, \ldots, x_N) \in K^{N+1} \ : \forall\, P \in \mathscr{X}, \quad P(x) = 0\}.$$

- 若 $x \in \widetilde{\mathscr{X}}(K)$, $\forall \lambda \in K$, $\lambda x \in \widetilde{\mathscr{X}}(K)$.
- $\mathscr{X}(K) := \widetilde{\mathscr{X}}(K) \setminus \{(0, \ldots, 0)\} / \sim$,

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\}, \lambda x = y.$$

$\mathscr{X}(K)$ 中的元素称为 $\mathscr{X}$ 的取值在 K 中的点.

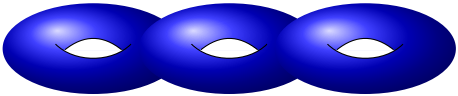
Mordell 猜想 – Faltings 定理的几何语言表述

定理

设 $\mathscr{X}$ 为算术射影簇，使得 $X = \mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ 是亏格 $\geqslant 2$ 的光滑射影曲线．那么其有理点集 $\mathscr{X}(\mathbb{Q})$ 为有限集．

亏格

若 $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ 是光滑射影曲线，那么 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ 是紧黎曼面．$\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ 的亏格就定义为该黎曼面洞的个数．



丢番图几何

概形，Zariski 拓扑，大线丛，...

丢番图方程的几何化

进一步理解 Diophantus 问题的几何表述（Zariski 拓扑，大线丛等等），需要用到代数几何.

$$\text{代数实体} \rightsquigarrow \text{几何实体（环层空间）}$$

$$\text{丢番图方程 (算术射影簇)} \rightsquigarrow \text{射影概形}$$

$$\text{有理解} \longleftrightarrow \text{概形的有理数点}$$

$$\text{解集的性态} \overset{?}{\Longleftarrow} \text{几何不变量}$$

局部环层空间

局部环层空间：拓扑空间 X 及其上的环层 $\mathcal{O}_X$.

- $\forall$ 开集 $U \subset X$，$\mathcal{O}_X(U)$ 是交换幺环；
- $\forall$ 开集 $V \subset U \subset X$ 有环同态 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$.
- $\forall y \in X$, $\mathcal{O}_{X,y} = \varinjlim_{y \in U \subset X} \mathcal{O}_X(U)$ 是局部环 ($\exists!$ 极大理想 $\mathfrak{m}_y$).
- $\kappa(y) = \mathcal{O}_{X,y}/\mathfrak{m}_y$ 称为 X 在 y 处的剩余类域.
- 例：拓扑空间 + 连续函数层；微分流形；复解析流形等等.
- 抽象的构造用来处理" 取值在不同域中的函数".

局部环层空间 X 的点

- 设 K 为域. 令

$$X(K) = \{(x, \varphi) \ : \ x \in X, \quad \varphi : \kappa(x) \to K \text{为域同态}\}.$$

概形

交换幺环 A 对应的仿射概形

- $\mathrm{Spec}(A) = \{$A的素理想$\}$.
- Zariski 拓扑: 闭子集形如 $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想.
- $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}\, A) = A$.
- $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} := A[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}]$

概形

仿射概形粘成的局部环层空间.

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}$ 的素理想

- 零理想 (0);
- 极大理想 (p)，其中 p 是素数.

Zariski 拓扑

- 若 p 是素数，(p) 是 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 的闭点.
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 的开子集形如 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{(p_1), \ldots, (p_n)\}$，其中 p_i 是素数. 特别地，$\overline{\{(0)\}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

数论观点

- (0) 处的局部环是 $\mathbb{Q}$;
- $\mathbb{Z}$ 的极大理想 (p) 对应于 $\mathbb{Q}$ 的 p-进绝对值.

射影概形

齐次素谱

- 令 $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ 为分次环.
- 若 f 是 R 中的齐次元，记 $R_{(f)}$ 为 $R[f^{-1}]$ 中的零次齐次元组成的环.
- $\mathrm{Proj}(R)$：由 $\mathrm{Spec}(R_{(f)})$（f 取遍 R 中的齐次元）粘成的概形.

与丢番图方程的联系

设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$ 的闭子簇，$I_{\mathscr{X}}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的多项式生成的 $\mathbb{Z}[T_0, \ldots, T_N]$ 的理想，对任意域 K 有

$$\mathscr{X}(K) = \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[T_0, \ldots, T_N]/I_{\mathscr{X}})(K).$$

- 以下将射影簇等同于其定义的射影概形.

线丛

令 X 为概形．所谓 X 上的线丛，是指局部同构于 $\mathcal{O}_X$ 的模层．

例

- 设 A 为交换幺环，$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ 为分次 A-代数，$X = \mathrm{Proj}(R)$．假设 R 作为 A-代数由 R_1 生成．对任意 $d \in \mathbb{N}$，R-模 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_{n+d}$ 定义了 X 上的线丛，记为 $\mathcal{O}_X(d)$．
- 若 $X = \mathbb{P}^N_A$，那么
$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = A[T_0, \ldots, T_N]_d$$
是 d 次齐次多项式构成的集合．
- 设 X 为光滑射影簇，其最高阶外微分形式丛 ω_X 是 X 上的线丛，称为 X 的典则线丛．

分次线性系

令 K 为域，X 为 K-上的射影簇，L 为 X 上的线丛.

- $V_\bullet(L) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ 是分次 K-代数.
- 所谓 L 的分次线性系，是指 $V_\bullet(L)$ 的分次子代数.

容量函数

设 $V_\bullet$ 为 L 的分次线性系，定义其容量为

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rk}_K(V_n)}{n^d/d!}, \quad d = \dim(X)$$

记 $\mathrm{vol}(L) := \mathrm{vol}(V_\bullet(L))$. 倘若 $\mathrm{vol}(L) > 0$，则说 L 是大线丛.

- 若 L 是丰沛丛，那么 $\mathrm{vol}(L)$ 等于自相交数 (L^d).

亏格

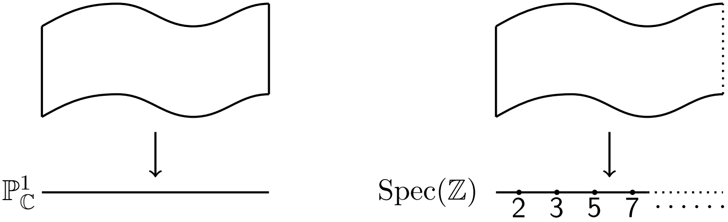
设 C 是 $\mathbb{Q}$ 上的光滑射影曲线，定义的 Riemann 面亏格为 g，那么 $\mathrm{vol}(\omega_C) = 2g - 2$. ω_C 是大线丛当且仅当 $g \geqslant 2$.

算术几何

什么是算术几何

- 研究 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上概形的数论性质；
- 与相对于射影代数曲线的代数几何有相似之处（数域 vs. 函数域）；
- 除了代数结构以外，还必须考虑超越结构；
- 综合使用各种研究方法：代数，分析，组合等等

代数几何与算术几何的比较



代数几何　　　　算术几何

算术几何的特殊之处

- 没有基域
- 算术代数簇总“非紧”，而且在代数几何的框架内不能紧化.

数域与函数域的比较

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 的相似性

- 都具有一个点（生成点）在概形中稠密；
- 其余点都是闭点；
- 生成点的局部环是域 ($\mathbb{Q}$ vs $\mathbb{C}(T)$)；
- 每个闭点对应于该域的绝对值 ($|\cdot|_p$ 或 $|\cdot|_x = \exp(-\mathrm{ord}_x(\cdot))$).

两者的不同

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 是定义在复数域上的概形；而 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 没有底域.
- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 具有“紧性”：$\forall f \in \mathbb{C}(T)^{\times}$, $\prod_x |f|_x = 1$
  (紧 Riemann 面上非零亚纯函数的零点和极点总重数为零)；
  而 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 不具有这样的性质.

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 的“紧化”

令 $|\cdot|_\infty$ 为 $\mathbb{Q}$ 的通常绝对值，那么 $\forall a \in \mathbb{Q}^{\times}$, $\prod_p |a|_p \cdot |a|_\infty = 1$

Arakelov 几何的思想

- 用复解析流形“紧化”算术射影簇，用度量“紧化”线丛；
- 结合代数几何和分析的方法研究算术几何问题.

研究对象

- 算术射影簇 $\mathscr{X}$ 及对应的复解析流形 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$；向量丛 $\mathscr{E}$ 及 $\mathscr{E}(\mathbb{C})$ 上的连续度量.
- 算术曲线的情形：$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ (∞ 对应于 $\mathbb{Q}$ 上通常的绝对值)；有限维赋范线性空间中的网格.

技术困难

- 这样的“紧化”没有好的代数结构；
- 代数方法和分析方法性质很不相同.

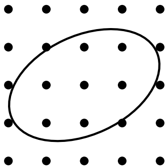
网格的“整体截面”

设 $\mathscr{E}$ 为有限维赋范线性空间 $(E, \|\cdot\|)$ 中的网格，记

- $\widehat{H}^0(\mathscr{E}, \|\cdot\|) := \{s \in \mathscr{E} \ : \ \|s\| \leqslant 1\}$,
- $\widehat{h}^0(\mathscr{E}, \|\cdot\|) := \log \# \widehat{H}^0(\mathscr{E}, \|\cdot\|)$.

注意

与射影曲线上向量丛的情形不同，$\widehat{H}^0(\mathscr{E}, \|\cdot\|)$ 一般对加法不封闭.



算术容量函数

令 $\mathscr{X}$ 为算术射影簇，$\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{X}$ 上的线丛，φ 为 $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ 上的连续度量.

- $H^0(\mathscr{X}(\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C}))$ 上的 sup 范数：

$$\forall\, s\in H^0(\mathscr{X}(\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C})),\quad \|s\|_{\varphi,\sup}:=\sup_{x\in\mathscr{X}(\mathbb{C})}\|s(x)\|_{\varphi}.$$

- $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L})$ 是赋范线性空间 $(H^0(\mathscr{X}(\mathbb{C}),\mathscr{L}(\mathbb{C})),\|\cdot\|_{\varphi,\sup})$ 中的网格，其 $\widehat{H}^0$ 和 $\widehat{h}^0$ 分别记作 $\widehat{H}^0(\mathscr{L},\varphi)$ 和 $\widehat{h}^0(\mathscr{L},\varphi)$

算术容量函数（森胁淳，2000）

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\mathscr{L},\|\cdot\|_{\varphi}):=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\widehat{h}^0(\mathscr{L}^{\otimes n},\varphi^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!},\qquad d=\dim(\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}).$$

- 若 $(\mathscr{L},\varphi)$ 丰沛，那么 $\widehat{\mathrm{vol}}(\mathscr{L},\varphi)=\widehat{c}_1(\mathscr{L},\varphi)^{d+1}>0$.

研究 $\widehat{\mathrm{vol}}$ 的困难和新方法

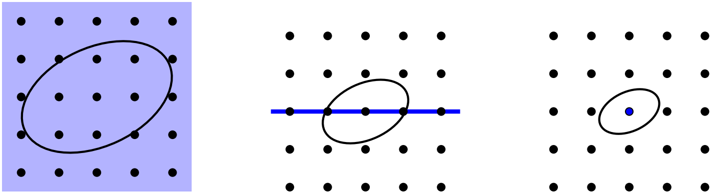
困难

“算术分次线性系” $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\widehat{H}^0(\mathscr{L}^{\otimes n},\varphi^{\otimes n})$ 没有合适的代数结构.

$\mathbb{R}$-降链法

设 $(\mathscr{E},\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间中的网格. 定义

$$\mathcal{F}^t(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}})=\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\{s\in\mathscr{E}\ :\ \|s\|\leqslant \mathrm{e}^{-t}\})$$



连接代数几何与数论的桥梁

令 $\mathscr{X}$ 为算术射影簇，$(\mathscr{L},\varphi)$ 为 $\mathscr{X}$ 上带连续度量的线丛.

与代数几何的联系

对任意 $t\in\mathbb{R}$，

$$V_\bullet^t(\mathscr{L},\varphi):=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{F}^{nt}(H^0(\mathscr{X}_{\mathbb{Q}},\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}^{\otimes n}))$$

是 $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ 的分次线性系.

与数论的联系：Minkowski 定理

- 若 $(\mathcal{E},\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间中的网格，那么

$$\left|\widehat{h}^0(\mathcal{E},\|\cdot\|)-\int_0^{+\infty}\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}^t(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}))\right|=O(\mathrm{rk}(\mathcal{E})\log(\mathrm{rk}(\mathcal{E}))).$$

- $\widehat{\mathrm{vol}}(\mathscr{L},\varphi)=(d+1)\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{vol}(V_\bullet^t(\mathscr{L},\varphi))\,\mathrm{d}t.$

凸几何与代数几何／算术几何

容量函数的凸几何描述

定理 (Okounkov，1996)

设 X 为域 K 上的 d 维整射影概形，$\mathcal{C}_d = \{\mathbb{R}^d$中的有界闭凸集$\}$.
那么存在映射 $\Delta : \{X$上的线丛$\} \to \mathcal{C}_d$, 满足以下条件:

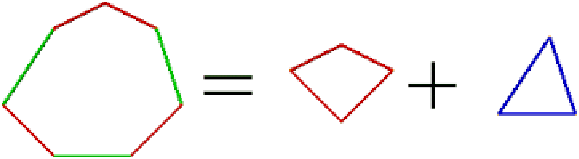
(1) 对任意 X 上的线丛 L，$\mathrm{vol}(L) = d! \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Delta(L)}(x)\,\mathrm{d}x$,

(2) 若 L 和 M 是两个线丛，$\Delta(L) + \Delta(M) \subset \Delta(L \otimes M)$.

- 可以推广到分次线性系的情形（Kaveh-Khovanskii，Lazarsfeld-Mustaţă, 2008）

Minkowski 和

$\Delta_1 + \Delta_2 := \{x + y \,|\, x \in \Delta_1,\, y \in \Delta_2\}$.



Brunn-Minkowski 不等式

定理

设 Δ_1 和 Δ_2 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有界闭凸集，ν_d 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，那么

$$\nu_d(\Delta_1 + \Delta_2)^{1/d} \geqslant \nu_d(\Delta_1)^{1/d} + \nu_d(\Delta_2)^{1/d}.$$

代数几何形式

设 X 为域 K 上的 d 维整射影概形，L 和 M 是 X 上的大线丛，那么

$$\mathrm{vol}(L \otimes M)^{1/d} \geqslant \mathrm{vol}(L)^{1/d} + \mathrm{vol}(M)^{1/d}.$$

推论：Hodge 指标不等式

设 S 为某域上的整射影曲面，L 和 M 是 S 上的丰沛线丛，那么

$$(L \cdot M)^2 \geqslant (L^2)(M^2).$$

算术容量函数的凸几何构造

令 $\mathscr{X}$ 为算术射影簇，$(\mathscr{L},\varphi)$ 为 $\mathscr{X}$ 上带连续度量的线丛．

凹变换

定义 $G_{(\mathscr{L},\varphi)}:\Delta(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})\to\mathbb{R}$，

$$G_{(\mathscr{L},\varphi)}(x):=\sup\{t\in\mathbb{R}\ :\ x\in\Delta(V_\bullet^t(\mathscr{L},\varphi))\}.$$

- $G_{(\mathscr{L},\varphi)}$ 是 $\Delta(V_\bullet^t(\mathscr{L},\varphi))$ 上的凹函数；
- $\widehat{\mathrm{vol}}(\mathscr{L},\varphi)=(d+1)!\displaystyle\int_{\Delta(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})}G_{(\mathscr{L},\varphi)}(x)\,\mathrm{d}x$；
  $G_{(\mathscr{L},\varphi)}$ 含有比算术容量函数更多的信息；
- 若 $(\mathscr{M},\psi)$ 是另一个带度量的线丛，对任意 $(x,y)\in\Delta(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})\times\Delta(\mathscr{M}_{\mathbb{Q}})$ 有

$$G_{(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M},\varphi\otimes\psi)}(x+y)\geqslant G_{(\mathscr{L},\varphi)}(x)+G_{(\mathscr{M},\psi)}(y).$$

相对等周不等式

定理

设 Δ_0 和 Δ_1 为 $\mathbb{R}^d$ 中的凸体，G_0 和 G_1 分别是 Δ_0 和 Δ_1 上的 Lebesgue 可积函数．对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，令 H_ε 为 $\Delta_0 + \varepsilon\Delta_1$ 上的正值 Borel 函数，使得

$$\forall\,(x,y) \in \Delta_0 \times \Delta_1, \quad H_\varepsilon(x+\varepsilon y) \geqslant G_0(x) + \varepsilon G_1(y).$$

那么下列不等式成立

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\int_{S_\varepsilon} H_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Delta_0} G_0(x)\,\mathrm{d}x}{\varepsilon}$$

$$\geqslant d\Big(\frac{\nu_d(\Delta_1)}{\nu_d(\Delta_0)}\Big)^{1/d} \int_{\Delta_0} G_0(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\nu_d(\Delta_0)}{\nu_d(\Delta_1)} \int_{\Delta_1} G_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

- 若取 $G_0 \equiv 1$，$G_1 \equiv 1$，$H_\varepsilon \equiv 1+\varepsilon$，便得到传统的等周不等式

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0+} \nu_d(\Delta_0+\varepsilon\Delta_1) \geqslant \nu_d(\Delta_0)^{(d-1)/d}\cdot\nu_d(\Delta_1)^{1/d}.$$

测度输送 (transport of measures)

设 Δ_0 和 Δ_1 为 $\mathbb{R}^d$ 中两个凸体.

均匀分布的输送

$f\colon \Delta_0 \to \Delta_1$ 微分同胚，使得 $f_*(\mathbb{1}_{\Delta_0}\nu_d) = \mathbb{1}_{\Delta_1}\nu_d$.

Knothe 输送

存在均匀分布的输送 $f\colon \Delta_0 \to \Delta_1$，使得 Df 处处是上三角矩阵，对角线系数为正. 利用 $\mathrm{Id} + \varepsilon f\colon \Delta_0 \to \Delta_0 + \varepsilon\Delta_1$ 来证明上述定理.

猜想

存在均匀分布的输送 $f\colon \Delta_0 \to \Delta_1$，使得

$$(\mathrm{Id} + f)_*(\mathbb{1}_{\Delta_0}\nu_d) \leqslant (d+1)\mathbb{1}_{\Delta_0+\Delta_1}\nu_d.$$

相对算术等周不等式和 Brunn-Minkowski 不等式

定理（相对算术等周不等式）

设 $\mathscr{X}$ 为算术射影簇，$\overline{\mathscr{L}_0}=(\mathscr{L}_0,\varphi_0)$ 和 $\overline{\mathscr{L}_1}=(L_1,\varphi_1)$ 为 $\mathscr{X}$ 上的丰沛的带连续度量的线丛，$L_0=\mathscr{L}_{0,\mathbb{Q}}$，$L_1=\mathscr{L}_{1,\mathbb{Q}}$，那么

$$(d+1)(\overline{\mathscr{L}_0}^d\cdot\overline{\mathscr{L}_1})\geqslant d\left(\frac{\mathrm{vol}(L_1)}{\mathrm{vol}(L_0)}\right)^{1/d}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0})+\left(\frac{\mathrm{vol}(L_0)}{\mathrm{vol}(L_1)}\right)\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_1}).$$

- 强于经典等周不等式的算术形式：
  $(d+1)(\overline{\mathscr{L}_0}^d\cdot\overline{\mathscr{L}_1})\geqslant\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0})^{d/(d+1)}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_1})^{1/(d+1)}$.

推论（相对算术 Brunn-Minkowski 不等式）

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0}\otimes\overline{\mathscr{L}_1})}{\mathrm{vol}(L_0\otimes L_1)}\geqslant\varphi(L_0,L_1)^{-1}\left(\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0})}{\mathrm{vol}(L_0)}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_1})}{\mathrm{vol}(L_1)}\right),$$

其中 $\varphi(L_0,L_1)=d+1-d\,\dfrac{\mathrm{vol}(L_0)^{1/d}+\mathrm{vol}(L_1)^{1/d}}{\mathrm{vol}(L_0\otimes L_1)^{1/d}}\geqslant 1$ 体现几何 Brunn-Minkowski 不等式的偏差.

算术曲面的情形

当 $d=1$ 时 $\mathrm{vol}(L_0 \otimes L_1) = \mathrm{vol}(L_0) + \mathrm{vol}(L_1)$，从而 $\varphi(L_0, L_1) = 1$．于是便得到

$$2(\overline{\mathscr{L}_0} \cdot \overline{\mathscr{L}_1}) \geqslant \frac{\mathrm{vol}(L_1)}{\mathrm{vol}(L_0)} \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0}) + \frac{\mathrm{vol}(L_0)}{\mathrm{vol}(L_1)} \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_1}).$$

由算术－几何平均不等式便得到算术 Hodge 指标不等式（Faltings-Hriljac 1985）：

$$(\overline{\mathscr{L}}_0 \cdot \overline{\mathscr{L}_1})^2 \geqslant \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_0}) \cdot \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}_1}).$$

谢谢.