随机分析与几何

数学所讲座报告

李　向　东

中国科学院数学与系统科学研究院

2016年11月2日

1. 随机分析发展简介
2. 随机微分几何
3. 路径空间与环空间上的随机分析
4. Ricci流与加权Riemann流形上的几何分析
5. 若干挑战性问题及研究方向

随机分析是上世纪四十年代由日本数学家伊藤清(K.Itô)所创立的一门学科，被誉为“随机世界中的Newton律”。

伊藤清因其开创性的工作获得了Wolf奖和Gauss奖。

经过八十年的历史发展，随机分析已成为现代数学的核心领域之一，与偏微分方程、位势论、调和分析、遍历论、几何、拓扑、量子场论、统计力学、控制论、金融数学等领域相互渗透、相互促动，在现代数学的研究和发展中书写了绚烂多彩的篇章。

本报告将从随机分析与几何分析、调和分析等领域相互交融的角度，向大家呈现这一成果斐然的壮丽画面。

Figure: K.Ito

Brown运动

首先，我们从上世纪之初Einstein的论文开始谈起。

1905年，A.Einstein从统计力学和热力学的观点研究了悬浮在液体中的花粉粒子的无规则运动，从大量液体分子对悬浮粒子的碰撞的总和（独立随机变量之和）考虑，可以认为花粉粒子在时间t 到$t+\Delta t$之间所受到的总的碰撞所引起的位移为

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

其中ξ_i表示液体中第i个粒子对花粉粒子的碰撞所引起的位移。显然，(ξ_i)是独立同分布的随机变量。

假定(ξ_i)是独立同分布(i.i.d)的随机变量(r.v.)，

$$\mu = \mathbb{E}[\xi_i], \quad \sigma^2 = Var(\xi_i)$$

- 强大数定律：

$$\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{N} \to \mu, \quad a.s.$$

- 中心极限定理：

$$\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \to N(0,1), \quad in \quad distribution$$

Brown运动

不妨假设$\mu=0$,即液体中大量分子对花粉粒子的碰撞具有某种对称性，则

$$X_{t+\Delta t}-X_t=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\sim N(0,N\sigma^2).$$

显然，N（在时间区间$[t,t+\Delta t]$内液体分子对花粉粒子的碰撞数）与Δt 成正比， 即 $N=k\Delta t$, k为常数。故有

$$X_{t+\Delta t}-X_t=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\sim N(0,k\sigma^2\Delta t).$$

同理，由于

$$X_{t+\Delta t}-X_t=\sum_{i=1}^{N}\xi_i,\quad X_{s+\Delta s}-X_s=\sum_{i=1}^{N'}\xi_i',$$

(ξ_i)与(ξ_i')相互独立， 我们有$X_{t+\Delta t}-X_t$与$X_{s+\Delta s}-X_s$相互独立。

Brown运动

从以上考虑，Einstein提出以下Brown运动的数学模型：

Definition 1.1 (Einstein)

设$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$为取值于$\mathbb{R}$的随机过程,满足以下条件：
(1)$X_0=0$， 且 a.s的轨道，$t\mapsto X_t$连续，
(2)$X_{t+\Delta t}-X_t$ffi$X_{s+\Delta s}-X_s$相互独立, $\forall s,t\in\mathbb{R}^+$
(3)$X_{t+\Delta t}-X_t\sim N(0,\Delta t)$，取$k,\sigma$使得$k\sigma^2=1$,
则称(X_t)为标准Brown运动。

问题：满足这些性质的Brown运动是否真的存在?
N.Wiener给出了Brown运动的数学构造！答案： Yes！

$$X_t(\omega)=\frac{t}{\sqrt{\pi}}\xi_0+\sum_{n\geq 1}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kt}{k}\xi_k$$

其中(ξ_n)为i.i.d $N(0,1)$随机变量序列。

Brown 运动的轨道性质

(1)轨道连续性，且具有$(\frac{1}{2}-\varepsilon)-$Hölder连续性 $(\forall 0<\varepsilon<\frac{1}{2})$
(2)几乎所有的轨道在任何时间点不可微
(3)几乎所有的轨道在任何时间区间上不是有界变差
(4)重对数律:

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=\pm 1)=1$$

由于Brown运动的轨道不是有界变差或可微的，因此沿着Brown运动的轨道的积分不能用 Riemann-Stieltjes积分定义。如何定义积分

$$\int H_s dW_s = ?$$

是随机分析发展中令人止步不前的困难之一。

随机微分方程SDE

1908年，P.Langevin用SDE给出了悬浮在流体中的花粉粒子的动力学方程：

$$dv_t = -\nu v_t dt + \sigma dW_t, \quad v(0) = v_0,$$

其中v_t为花粉粒子的速度，$-\nu$为漂移系数，σ为扩散系数。由常数变易法，可以求出SDE的解：

$$v_t = (v_0 + \sigma \int_0^t e^{\nu s} dW_s) e^{-\nu t}$$

在此，有一项积分

$$\int_0^t e^{\nu s} dW_s$$

其定义可由分部积分公式给出

$$\int_0^t e^{\nu s} dW_s = e^{\nu t} W_t - \int_0^t W_s de^{\nu s}.$$

Itô随机分析的建立与发展

1931年，Kolmogorov在其论文“概率论中的解析方法”（Math. Ann. 1931,104,415-458）中，利用PDE方法研究了扩散过程的构造问题。他的方法本质上就是二阶微分算子的Hill-Yoshida半群理论。

1940年，在P.Lévy的建议下，K.Itô(伊藤清)从微观的角度重新研究了扩散过程的构造问题。
欲构造扩散过程(X_t)，使之满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t+\Delta t}-X_t|X_t=x] &= a(t,x)\Delta t+o(\Delta t),\\ Var[X_{t+\Delta t}-X_t|X_t=x] &= b(t,x)\Delta t+o(\Delta t).\end{aligned}$$

利用扩散过程的Markov性质和

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_{t+\Delta t}-B_t|B_t=x] &= 0,\\ Var[B_{t+\Delta t}-B_t|B_t=x] &= \Delta t,\end{aligned}$$

Itô随机分析的建立与发展

可以视(X_t)满足以下差分方程

$$X_{t+\Delta t} - X_t = a(t, X_t)\Delta t + \sqrt{b(t, X_t)}(B_{t+\Delta t} - B_t) + o(\Delta t).$$

令$\Delta t \to 0$，则得到以下SDE：

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sqrt{b(t, X_t)}dB_t.$$

此前，S.Bernstein及P.Lévy曾将此SDE形式上写为

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sqrt{b(t, X_t)}\xi_t\sqrt{dt},$$

其中$(\xi_t)_{t\in[0,T]}$i.i.d标准Gauss分布的随机变量，记$\sigma = \sqrt{b}$,则得

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{1.1}$$

两边沿(B_t)的轨道积分，则得

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Itô随机分析的建立与发展

第一项积分为通常意义下的Riemann积分，而第二项积分是被积函数$\sigma(s, X_s)$沿Brown运动的轨道B_s的积分。由于B_s的轨道不是有界变差函数，故第二项积分在经典的Riemann-Stieltjes积分意义下不能合理定义。

1942年，伊藤清首次给出了形如

$$\int_0^t Y_s dB_s$$

的随机积分的合理定义，并证明了a, σ满足Lipschitz条件时，SDE解的存在唯一性，从而用SDE给出了扩散过程的概率构造。

Itô积分

Definition 1.2 (Itô积分)

设(Y_t)关于$\mathcal{F}_t=\sigma(B_s, s\le t)$ 适应，轨道连续，则定义

$$I_t=\int_0^t Y_s dB_s=\lim_{N\to\infty,\max|\Delta t_i|\to 0}\sum_{i=1}^N Y_{t_i}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$$

其中$0=t_1\le\cdots\le t_N=t, N\in\mathbb{N}$.

性质： I_t为$\mathcal{F}_t$-连续鞅

$$\mathbb{E}[I_t|\mathcal{F}_s]=I_s,\quad a.s.\quad \forall s\le t$$

并且具有L^2-等距性质

$$\mathbb{E}[I_t^2]=\mathbb{E}[\int_0^t |Y_s|^2 ds].$$

SDE解的存在唯一性定理

Theorem 1.3 (Itô(1942))

设$a(t,x)$和$\sigma(t,x)$满足*Lipschitz*条件：
存在常数$K>0$, 使得$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$||a(t,x)-a(t,y)||\le K||x-y||$$
$$||\sigma(t,x)-\sigma(t,y)||\le K||x-y||,$$

SDE (1.1) 在任意时间区间$[0,T]$上有且仅有一个关于$\mathcal{F}_t$适应的强解$X_t\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$。

Itô公式

在此过程中，Itô证明了以下著名的Itô公式：

Theorem 1.4 (Itô公式)

设$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，有

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

一般地，$\forall f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，则

$$f(B_t, t) - f(B_0, 0) = \int_0^t \nabla f(B_s, s)dB_s + \int_0^t (\partial_s + \frac{1}{2}\Delta) f(B_s, s)ds.$$

Itô随机分析因此诞生。

扩散与PDE

- (J.Fourier) 记$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为$\mathbb{R}^n$中的Laplace算子，$\mathbb{R}^n$上的热方程
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D^2}{2}\Delta u$$
的基本解为
$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi D^2 t)^{\frac{n}{2}}} \exp\{-\frac{|x-y|^2}{2D^2 t}\},$$
其中D为扩散系数。
- Einstein(1905) $\mathbb{R}^n$上的Brown运动(X_t)的转移概率密度为$\mathbb{R}^n$上的热方程的基本解，即对任意$\mathbb{R}^n$中的开集A,
$$\mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = x) = \int_A p_t(x, y) dy.$$

扩散与PDE

SDE 的生成元为

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i}{\partial x_i}.$$

Ito证明： $\mathbb{R}^n$上的扩散过程(X_t)的转移概率密度$p_t(x,y)$为$\mathbb{R}^n$上的热方程

$$\partial_t u = \mathcal{L} u$$

的基本解， 即对任意$\mathbb{R}^n$中的开集A,

$$\mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = x) = \int_A p_t(x,y)dy.$$

注：利用概率方法，Krylov与Safanov对具有可测系数的非散度型一致椭圆算子证明了热方程解的Hölder连续性。

Feynmann-Kac公式

设 Væ$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为有界连续函数， 考虑Schrodinger算子的热方程

$$\partial_t u = \mathcal{L}u + Vu, \qquad u(0,\cdot) = f.$$

利用Ito公式， 可以证明以下著名的Feynmann-Kac公式

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_t)\exp\left(-\int_0^t V(X_s)ds \right)\right].$$

随机微分几何

随机分析与微分几何的相互交融和相互渗透，就产生了随机微分几何这门学科，其创始人为P.Malliavin, D.Elworthy等人。
随机微分几何的主要研究内容是流形的几何、拓扑性质与流形上的随机过程（主要是Brown运动和扩散过程）的概率性质、流形上的PDE之间的相互关系。

流形上的Brown运动是如何定义的?
回顾$\exp_x : T_xM \to M$, $\xi \mapsto \exp_x \xi = \gamma_{x,\xi}(1)$，其中$\gamma_{x,\xi}(t)$为$M$上的测地线，满足$\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot{\gamma}_{x,\xi}(0) = \xi$。

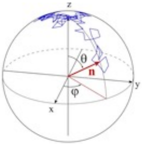

Figure: Brownian Motion on sphere

随机微分几何Stochastic Differential Geometry

J.M.Bismut Mécanique Aléatoire

设(ξ_n)为i.i.d的$N(0,\mathrm{I})$-随机变量序列，$x_0 \in M$给定，定义

$$
\begin{aligned}
X^0(t) &= x_0 \\
X^n(t) &= \exp_{x_0}(tU_1\xi_0), \quad 0 \le t \le \frac{1}{2^n} \\
X^n(t) &= \exp_{X^n(\frac{1}{2^n})}((t-\frac{1}{2^n})U_1\xi_1), \quad \frac{1}{2^n} \le t \le \frac{2}{2^n} \\
&\vdots \\
X^n(t) &= \exp_{X^n(\frac{k}{2^n})}((t-\frac{k}{2^n})U_k\xi_k), \quad \frac{k}{2^n} \le t \le \frac{k+1}{2^n},
\end{aligned}
$$

其中U_i为沿轨道X^n_t在$[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$区间段的平行移动。

Brown运动的构造

则可以证明：
当n收敛到∞时，$(X^n(t))$依概率收敛到某个具有连续轨道的Markov过程 (X_t)，且具有以下性质：
(1)$t \mapsto X_t$的轨道连续
(2)X_t是Markov过程：$\forall t, s > 0$，$\forall 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$，$\forall x_1, \cdots, x_n \in M$，$\forall A$ 开集，

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_{t_1} = x_1, \cdots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_t = x)$$

(3)$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_t = x) = \int_A p_s(x, y) dy$，
其中$p_s(x, y)$为流形上热方程

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u$$

的基本解（即热核）。

Brown运动的构造

因此

$$\boxed{\textit{Brownian Motion on } M \Longleftrightarrow \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u \textit{ on } M}$$

Brown运动的SDE构造：

- K. Ito (1950): SDEs on manifolds
- E. B. Dynkin(1960): Lie groups
- Gangoli (1965): 对称空间
- Eells-Elworthy-Malliavin(1974)：Riemannian manifolds

随机微分几何由此诞生。

双曲平面上的布朗运动

在上半平面上，考虑双曲度量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

则

$$\Delta_{\mathbb{H}} = y^2 \Delta_{\mathbb{R}^2}.$$

因此, $\mathbb{H}$上的布朗运动(X_t, Y_t)满足的SDE为

$$\begin{aligned} dX_t &= Y_t dW_t^1, \\ dY_t &= Y_t dW_t^2, \end{aligned}$$

其中$W_t = (W_t^1, W_t^2)$为$\mathbb{R}^2$上标准布朗运动。

在极坐标系

$$ds^2 = dr^2 + (\sinh r)^2 d\theta^2,$$

我们有

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \coth r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{(\sinh r)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

其对应的SDE为

$$\begin{aligned} dr_t &= dW_t^1 + \coth r_t dt, \\ d\theta_t &= \frac{1}{\sinh r_t} dW_t^2. \end{aligned}$$

几个重要而有影响的结果

(1)负曲率流形上非平凡有界调和函数的存在性与构造
D.Sullivan(J.Diff.Geom 1984) 设M为完备、连通、单连通Riemann流形，其截面曲率K满足

$$-a^2 \leq K \leq b^2,$$

其中$a > b \geq 0$为常数，
问：M上是否存在非常数有界调和函数?
M上是否存在非常数正（非负）调和函数?

无穷边界“∂M”
已知：满足上述截曲率条件的Riemann流形在拓扑上微分同胚于$\mathbb{R}^n$,但在无穷远处有几何边界，故在几何上与圆盘相似。

几个重要而有影响的结果

Dirichlet问题的Poincaré扫除方法在概率论上的表现形式就是以下的Kakutani定理：设$D \subset \mathbb{R}^n$为有界区域，∂D光滑， X_t为$\mathbb{R}^n$上 从x_0出发的B.M.，令

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$$

即τ为B.M.首次抵达边界的时间，称为D^c的首中时。
给定函数$f \in C(\partial D)$，考虑D上的Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad D \\ u|_{\partial D} = f & \text{on} \quad \partial D, \end{cases}$$

则有

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(X_\tau)].$$

利用Dirichlet问题概率解的思想，D.Sullivan成功地证明了负曲率流形上非平凡有界调和函数的存在性，并实质上地给出了其概率构造。

几个重要而有影响的结果

2)流形上微分形式的热方程及零化定理

设(M, g)为Riemann流形，d为M上的外微分算子，$d^* = *d*$，其中$*$为Hodge星算子， W.Hodge 引进了

$$\square = dd^* + d^*d,$$

称为Hodge Laplace 算子。

著名的Bochner公式为

$$\square = -\Delta + Ric,$$

其中$\Delta = Tr\nabla^2$ 为协变Laplace算子。

P.Malliavin给出了由Hodge Laplace 算子在微分形式上所定义的热半群的概率表达式，并利用此表达式证明了

Bochner零化定理的推广形式

Theorem 2.1

若M紧，且存在$x_0 \in M$使得$\mathrm{Ric}(x_0) > 0$, $\mathrm{Ric} \geq 0$, 则M上第一*Betti*数等于*0*, 即

$$H_1(M, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\Box = 0.$$

这个定理在微分几何中有简单的证明，可参见伍鸿熙。但概率方法有其特点。

$$\begin{aligned} \partial_t \omega &= \Box \omega \\ &= -\Delta \omega + \mathrm{Ric}(\omega), \\ \omega(0) &= \omega_0. \end{aligned}$$

令$M_t \in Ent(T_{X_0}M, T_{X_t}M)$为流形上沿布朗运动轨道$X_t$的ODE的解，

$$\begin{aligned} \partial_t M_t &= -2\mathrm{Ric}_{X_t} M_t, \\ M_0 &= Id. \end{aligned}$$

则由纤维丛上的Ito随机计算， 可以证明Hodge Laplace 算子的热半群的Feynmann-Kac概率表达公式(Malliavin1974)

$$\omega(t,x) = \mathbb{E}_x\left(M_t^* \omega_0(X_t)\right).$$

Malliavin的这一研究方法被D. Elworthy等人进一步发展。在具有"一小片"负曲率的流形上，Elworthy等人证明了de Rham上同调群的零化定理。

形象地说，如果流形M在某一小部分的曲率为负，而在更大的部分曲率为正，则只要负曲率部分的体积充分小，或负曲率的某个L^p-模充分小（被正曲率部分控制），则仍有可能证明M上的调和形式恒等于零。

我们利用这一想法证明了某些具有负Ricci曲率流形上的Riesz变换的L^p-有界性。

熟知，$\mathbb{R}^n$上的Riesz变换（$\mathbb{R}^1$时为Hilbert变换）

$$R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, ..., n,$$

为$L^p(\mathbb{R}^n, dx)$上的有界算子（奇异积分算子），

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

其中$1 < p < \infty$, C_p为常数。
这一结果在调和分析，偏微分方程及随机偏微分方程中都有重要应用，是Calderon-Zygmund理论的基石。

在几何分析的研究中，受E.M.Stein等人工作的影响，R. Strichartz, N. Louhoué等人研究了完备非紧Riemann流形上的Riesz变换的L^p有界性问题。如果按调和分析的方法进行研究，由于

$$\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty \nabla P_t f(x)\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

其中$P_t=e^{t\Delta}$为M上Laplace算子对应的热半群。设$p_t(x,y)$为其热核，则

$$\nabla P_t f(x)=\int_M \nabla p_t(x,y)f(y)dy.$$

因此，

$$\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty\int_M \nabla p_t(x,y)f(y)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

根据Calderon-Zgymund理论，需对流形M进行Calderon-Zgymund分解，且需估计

$$|\nabla p_t(x,y)-\nabla p_t(x,y')|,$$

即需对热核的梯度进行求差估计。（在此方向有很多工作，如陈杰诚，李嘉禹）

另一方面，从1970年到1974年，法国数学家P.A. Meyer发展了一套调和分析研究的概率方法。他利用关于Brown运动的随机积分和鞅论，给出了$\mathbb{R}^n$上Littlewood-Paley不等式的概率证明。 受他的工作的影响，D. Bakry证明了以下结果，

Theorem 2.2 (Bakry1986)

设M为具有非负*Ricci*曲率的完备*Riemann*流形。则对于任意$1 < p < \infty$, 存在正常数C_p, 使得对任意$f \in C_0^\infty(M)$, 有

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f\|_p \le C_p\|f\|_p,$$

即*Riesz*变换$\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$在$L^p$中有界，$1 < p < \infty$.

P.A. Meyer还在无穷维Gauss空间（即Wiener空间）上证明了相应于Ornstein-Uhlenbeck算子的Riesz变换关于Gauss测度的L^p-有界性。

等价地说，对于任意$1 < p < \infty$，存在常数$C_p > 0$, 使得对于$\mathbb{R}^n$上任意“足够好”的函数f, 如$f \in C_0^\infty(M)$, 有

$$\|f\|_p + \|\nabla f\|_p \le C_p \|(I - L)^{\frac{1}{2}} f\|_p,$$

其中$L = \Delta - x \cdot \nabla$为$\mathbb{R}^n$上的Ornstein-Uhlenbeck算子，$\|\cdot\|_p$为关于$\mathbb{R}^n$上Gauss测度$\gamma_n$的$L^p$范数。注意到常数$C_p$与维数$n$无关，因此上述不等式在$(\mathbb{R}^\infty, \gamma_\infty)$中成立，称为Meyer不等式。它在无穷维Wiener空间上的Malliavin分析中有十分重要的作用。

Figure: P. Malliavin

Malliavin计算与Hömander定理的概率证明

1935年，Kolmogorov（Ann.Math）研究了Langevin方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ dv &= -\mu v dt + \sigma dw_t, \end{aligned}$$

对应的Fokker-Planck算子的热方程

$$\partial_t u = Lu,$$

其中

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 v} - \mu v \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial x}.$$

他证明了热方程$\partial_t u = Lu$的基本解存在，并给出了其具体表达式。此算子是退化椭圆算子，但却满足亚椭圆性。

1965年， L. Hömander证明了偏微分方程理论中著名的亚椭圆定理。

1976年，P. Malliavin创立了无穷维Wiener空间上的随机变分理论，利用概率方法证明了Hömander 亚椭圆定理。

从1976年开始，国际上的许多著名概率学家对Malliavin计算的深入研究与发展做出了重要贡献，包括P.A. Meyer, D. Stroock, J.M. Bismut, S. Watanabe, K. Itô, Z.M. Ma, F.Z. Gong等等。

Malliavin计算与子流形几何

首先回顾淹没子流形定义。

Definition 2.3

设M, N为微分流形，$\phi: M \to N$为光滑映射。
若$d\phi: T_xM \to T_{\phi(x)}N$为满射，$\forall x \in M$, 则若对于$\forall y \in N$,

$$\phi^{-1}(y) = \{x \in M, \phi(x) = y\},$$

为M中的$(m-n)$维子流形，则称其为淹没子流形。

回顾余面积公式：对于任意$f: N \to \mathbb{R}$连续，$h: M \to \mathbb{R}$连续，

$$\int_M f(\phi(x))h(x)dvol(x) = \int_N \Big(\int_{\phi^{-1}(y)} h(x) \frac{1}{\sqrt{\det(d\phi(x)(d\phi(x))^*)}} d\sigma_y(x)$$

其中

$$d\phi: T_xM \to T_{\phi(x)}N$$

因此在ϕ的等值面$\{\phi(x)=y\}$上，可以定义新的面积元测度

$$d\mu_y(x)=\frac{1}{\sqrt{\det(d\phi(x)(d\phi(x))^*)}}d\sigma_y(x).$$

在此意义下有以下测度分解

$$dvol(x)=d\mu_y(x)\otimes dvol(y).$$

注意到$d\phi(x):T_xM\to T_{\phi(x)}N$ 为满射等价于

$$d\phi(x)(d\phi(x))^* æ T^*_{\phi(x)}N\to T_{\phi(x)}N$$

为双射。因此

$$\det(d\phi(x)(d\phi(x))^*)>0$$

即等价于$d\phi(x)$为满射。

Malliavin将此思想推广到无穷维Wiener空间，证明了关于Gauss测度的余面积公式，提出了非退化Wiener泛函的概念，并将此应用于Itô随机偏微分方程的解映射（Itô映射），即

$$\begin{aligned} dX_t(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} A_i(X_t(\omega))d\omega_t^i + A_0(X_t(\omega))dt, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

(其中$x_0, X_t(\omega) \in M$, A_i为M上的向量场) 的解新定义的映射

$$\begin{aligned} I_t : W_0(\mathbb{R}^n) &\to M \\ \omega &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

他证明了如下的结论:

Theorem 2.4

当$\{A_i\}_{0\leq i\leq n}$满足*Hömander*条件时，映射I_t为非退化（*Malliavin*意义下）*Wiener*泛函。

作为此结果与关于Gauss测度的推广形式的余面积公式的结论，我们有

Theorem 2.5 (Hömander, Malliavin)

若$\{A_i\}_{0\leq i\leq n}$满足*Hömander*条件，则热方程$\partial_t u = Lu$的基本解存在，且关于(x, y)具有光滑性，即存在$p_t(x, y) : [0, \mathbb{R}) \times M \times M \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$\begin{aligned} \partial_t p_t(x, y) &= L_x p_t(x, y), \\ \lim_{t\to 0} p_t(x, y) &= \delta_x(y). \end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v,\\ dv &= -\mu v dt + \nabla V(X_t)dt + \sigma dw_t,\end{aligned}$$

是亚椭圆的。因此，对于非退化的Malliavin-Wiener泛函

$$\begin{aligned}X_t : W_0(\mathbb{R}^n) &\to M\\ \omega &\mapsto X_t(\omega)\end{aligned}$$

我们有

$$p_t(x,y) = \int_{K_y} \frac{1}{\sqrt{\det C_t(\omega)}} \frac{e^{-\frac{|\omega|^2}{2t}}}{(2\pi t)^n} d\sigma_y(\omega),$$

其中$K_y = \{\omega \in W_0(\mathbb{R}^n) : X_t(\omega) = y\}$.

Atiyah-Singer指标定理的概率证明

令M为紧的定向Spin Riemann流形，$n = dim M = 2l$,
$N = SO(n)$为正规标架丛，$\pi : N \to M$为投影映射，S为M上的spinors.
N'为M的$Spin(n)$主丛，$\sigma : N' \to N$为覆盖映射。
$S = S_+ \otimes S_-$, $\xi \to M$为Hermitian bundle.
D为作用在$S \otimes \xi$上的Dirac算子，局部表示为

$$Df = \sum_{i=1}^{n} C(e_i)\nabla_{e_i} f,$$

其中$\{e_i\}$为x点处的正交标准基，∇_{e_i}为其对应的协变导数，$C(e_i)$为Clifford乘法。

Lichnerowicz公式

$$D2 = -\Delta^H + \frac{1}{4}K + \frac{1}{2}\sum_{i,j} C(e_i)C(e_j)L(e_i, e_j),$$

其中K为数量曲率。
对任意$h \in \Gamma(S \otimes \xi)$, 我们有以下的概率表示,

$$e^{-t\frac{D^2}{2}}h(x_0) = \mathbb{E}_x[exp(-\frac{1}{8}\int_0^t R(X_s)ds)U_{X_t}\Pi_t^{-1}h(X_t)],$$

其中$\Pi_t : T_{X_0}M \to T_{X_t}M$为沿布朗运动轨道的随机平移, U_t满足

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_t &= -\frac{1}{4}U_t L(X_t), \\ U_0 &= Id. \end{aligned}$$

令

$$D = \begin{pmatrix} D_+ & \\ & D_- \end{pmatrix} : \Gamma(S \otimes \xi) \to \Gamma(S \otimes \xi),$$

其中

$$\begin{aligned} D_+ : S_+ \otimes \xi &\to S_- \otimes \xi, \\ D_- : S_- \otimes \xi &\to S_+ \otimes \xi, \end{aligned}$$

则

$$index(D) = dimKerD_+ - dimKerD_-.$$

记$P_t(x,y)$为D^2的热核，则

$$P_t(x,x) : S_\pm \otimes \xi \to S_\pm \otimes \xi.$$

令 $STr(t,x) = Tr(P_t(x,x)|_{S_+\otimes\xi}) - Tr(P_t(x,x)|_{S_-\otimes\xi})\Theta$

Theorem 2.6 (Atiyah-Singer)

对任意$t>0$,

$$Ind(D_+)=\int_M STr(t,x)dx.$$

记

$$I(t,x)=P_t(x,x)\mathbb{E}_x[e^{-\frac{1}{8}\int_0^t R(X_s)ds}STr(U_t\Pi_t^{-1})|X_t=x],$$

则由于 $P_t(x,x)\sim\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}$，可得当$t\to 0$时，由于

$$e^{-\frac{1}{8}\int_0^t R(X_s)ds}\to 1,$$

则

$$I(t,x)\sim\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\mathbb{E}_x[STr(U_t\Pi_t^{-1})|X_t=x].$$

事实上，由

$$\Pi_t = \Pi_t^S \otimes \Pi_t^\xi,$$

其中Π_t^S为沿S方向的随机平移，Π_t^ξ为沿ξ方向的随机平移，我们可以得到

$$I(t,x) \sim \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\mathbb{E}_x[STr(U_t(\Pi_t^S \bigotimes \Pi_t^\xi))|X_t = x].$$

利用随机偏微分方程的大偏差理论和Lévy面积公式，可以证明

$$\lim_{t\to 0} I(t,x) = I(x) = \det\Big(\frac{R^{TM}/4\pi}{\sin(R^{TM}/4\pi)}\Big)^{\frac{1}{2}} \wedge ch(\xi),$$

其中$ch(\xi)$为Hermitian丛ξ的Chern-character.

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

从Bismut的工作可以引发path和loop空间上的随机分析。
设M为紧Riemann流形，$0 \in M$固定，考虑

$$\mathbb{P}_0(M) = C_0([0, T], M),$$

$$\mathbb{L}_0(M) = C_0(S^1, M) \quad \text{（固定基点}\gamma(0) = \gamma(T) = 0\text{）},$$

在$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上可以自然定义横截向量场

$$D_X = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\gamma_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0},$$

在$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上有自然定义的概率测度（Wiener测度和固定基点和终点的Wiener测度—条件Winner测度）。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

一个自然而基本的问题是当D_X满足什么性质时，它生成了$\mathbb{P}_0(M)$或$\mathbb{L}_0(M)$上的一条积分曲线，与这个积分曲线对应的单参数半群称为D_X所生成的流φ_t满足

$$\varphi_t : \mathbb{P}_0(M) \to \mathbb{P}_0(M)$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

$$\varphi_0 = id,$$

它把$\mathbb{P}_0(M)$上的概率测度μ映为象测度$\varphi_{t*}\mu$。问题中隐含的要求是 $\varphi_{t*}\mu$与μ是否相互等价。
在$M = \mathbb{R}^n$时，这就是著名的Cameron-Martin定理。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

设$\varphi_\epsilon : W_0(\mathbb{R}^n) \to W_0(\mathbb{R}^n), \quad \omega(\cdot) \mapsto \omega(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)$，
其中$\omega_\varepsilon(\cdot) = \omega(\cdot)$, $h(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\omega_\varepsilon(\cdot)$。

Theorem 3.1 (Cameron-Martin)

对任意的$h \in \mathbb{H} = W_0^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^n)$, 我们有$(\varphi_\varepsilon \mu)_* \approx \mu$ 且

$$\frac{d(\varphi_\varepsilon \mu)}{d\mu}(\omega) = \exp(\epsilon \int_0^T \dot{h}(s) d\omega(s) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T |\dot{h}(s)|^2 ds).$$

1990年代，B.Driver, E.Hsu, D.Strook等人相继证明了$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上的对应于向量场D_h的流(φ_ε)的存在唯一性并推广了Cameron-Martin定理。由此可以证明$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上的分部积分公式。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

进一步，利用所定义的向量场D_{e_i}，可以合理定义O-U算子:

$$\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{\infty} D_{e_i}^* D_{e_i},$$

其中e_i为$\mathbb{H} = W^{1,2}([0,T], T_{x_0}M)$的任意一组ONB，$D_{e_i}^*$为$D_{e_i}$的伴随算子（由分部积分公式所确定），$\mathcal{L}$是$W_0(\mathbb{R}^n)$上O-U算子的推广。在$W_0(\mathbb{R}^n)$上，形式地，有以下表达式：

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

可以证明$W_0(\mathbb{R}^n)$上的O-U算子对应的O-U过程

$$\begin{cases} dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

的解为

$$X_t = xe^{-t} + \sqrt{2}\int_0^T e^{-(t-s)} dW_s,$$

其中(W_t)为$W_0(\mathbb{R}^n)$上的Brown运动。

对于非平凡流形上的$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$是否可以构造其上的O-U过程?

1994年，Driver和Röckner利用Albeverio-Ma-Röckner所发展的Quasi-regular Dirichlet理论，给出了 $\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上O-U过程的构造。然而，是否可以用无穷维SDE的方法构造这些空间上的O-U过程，一直是未解决的基本问题之一。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

在紧Riemann流形上的路径空间$\mathbb{P}_0(M)$上，S.Fang证明了关于Wiener测度的Poincaré不等式:

$$||F-\mathbb{E}F||_{L^2(\mu)} \leq C_1 \int_{\mathbb{P}_0(M)} ||DF(r)||^2 d\mu(r).$$

Hsu证明了log-Sobolev不等式

$$\mathbb{E}(F^2 \log F^2/||F||_{L^2}^2) \leq C_2 \int_{\mathbb{P}_0(M)} |DF(r)|^2 d\mu(r).$$

在$\mathbb{L}_0(M)$上这些不等式是否成立，是这一项工作中基本而重要的课题之一， 在这一问题的研究中，Gong, Ma获得了十分重要的研究成果。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

在$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上，Cruzeiro-Malliavin引进了Levi-Civita联络，自然的问题是关于这个联络是否有好的“微分几何”，即Riemann曲率和Ricci曲率是否合理定义。他们证明了这些曲率无法合理定义， 因而在$\mathbb{P}_0(M)$和$\mathbb{L}_0(M)$上不能建立经典的Riemann几何。

受Bismut工作的影响，他们引进了所谓的Markov联络，一个基本的问题是关于他们所引进的Markov联络是否可以证明测地线的存在性，唯一性，并证明Wiener测度关于这些测地线的拟不变性，在本人的博士论文中，我们完整地解决了这一个基本问题。

Stochastic Analysis on Path and loop Spaces

在本人的博士论文中，还证明了Itó映射

$$I : W_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{P}_0(M)$$

不是$W^{1,2}$意义下的同胚映射，但具有某种Sobolev空间意义下的有界性，即

$$I : W^{2r,p+\varepsilon}(W_0(\mathbb{R}^n)) \to W^{r,p}(\mathbb{P}_0(M)).$$

同时，我们还用Malliavin的方法，重新构造了环空间$\mathbb{L}_0(M)$上单参数流的存在唯一性以及Wiener测度的拟不变性。

Ricci流与加权Riemann流形上的几何分析

Ricci曲率是微分几何中的重要概念。1982年R. Hamilton引进了Ricci曲率流

$$\partial_t g_t = -2\mathrm{Ric}_{g_t}.$$

- 当M为紧流形时，他证明了Ricci曲率流对应的Cauchy问题在短时间内的存在唯一性。
- 他还证明了在三维紧致Riemann流形上，若初始度量有的Ricci曲率为正，则方程

  $$\partial_t g_t = \frac{2}{3}r(t) - \mathrm{Ric}_{g_t},$$

  （其中

  $$r(t) = \frac{1}{Vol_{g_t}(M)}\int_M R(g_t)dvol_{g_t}$$

  为标量曲率的平均值），在$[0,\infty]\times M$上有唯一的解$g(t)$, 并且$g(t)$指数收敛到某个Einstein度量$\bar{g}$, i.e. $\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = \lambda\bar{g}$, 其中 λ为常数。

因此，在具有正的Ricci曲率的三维Riemann流形上，可以证明Poincaré猜想。然而，Gao与Yau证明并非所有三维紧致Riemann流形上都可以赋予Riemann度量使得Ricci曲率 为正。Hamilton利用Ricci曲率流形变Riemann度量，用以证明Poincaré猜想。

2002年，俄国数学家G. Perelman给出了Ricci曲率流的重新解释，他引进了$\mathcal{F}$-泛函，证明了在加权体积测度$d\mu = e^{-f}dvol_g$不变的条件下，$\mathcal{F}$-泛函

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2)e^{-f}dvol_g$$

的梯度流是

$$\partial_t g_t = -2(\mathrm{Ric}_{g_t} + \nabla^2_{g_t} f),$$

且f满足共轭热方程

$$\partial_t f = -\Delta f - R.$$

进一步他证明了

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(g(t), f(t)) = 2\int_M |\mathrm{Ric} + \nabla^2 f|^2 e^{-f} dvol_g.$$

因此，$\mathcal{F}$-泛函沿$(g(t), f(t))$具有单调性，并且$\mathcal{F}$-泛函达到其极小值点当且仅当(M, g, f)满足

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f \equiv 0,$$

称为稳定Ricci孤立子。

进一步，Perelman受流体力学中Boltzmann熵的启发，引进了$\mathcal{W}$-熵泛函，证明了$\mathcal{W}$-熵泛函沿Ricci曲率流及其共轭热方程解演变的单调性， 其平衡态对应于收缩Ricci孤立子, 即

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g,$$

其中λ为某个正常数。

基于这个单调性结果，再利用Rothaus关于对数Sobolev不等式的有关结果，Perelman证明了Hamilton关于Poincaré猜想的研究计划中长期悬而未决的non local collapsing定理，从而为Poincaré猜想的解决扫清了障碍。

Perelman引进的$\mathcal{F}$-泛函和$\mathcal{W}$-熵泛函都和流体力学和概率论中熵这个重要概念有关。

然而，$\mathcal{W}$-熵泛函的背后隐藏的流体力学 或概率论的背景是什么？

为了揭开$\mathcal{W}$-熵的神秘面纱，我们研究了加权Riemann流形上Witten Laplace算子的热方程$\partial_t u = Lu$的$\mathcal{W}$-熵，其中$L = \Delta - \nabla\phi \cdot \nabla$。

我们给出了关于Ricci曲率流的Perelman $\mathcal{W}$-熵的清晰的概率解释，并证明了加权完备Riemann流形及超Ricci流上加权Laplace算子的$\mathcal{W}$-熵的单调性及其刚性定理。

这一研究受到了几何分析和流形上随机分析领域有关专家的重视和关注。

在加权Riemann流形和超Ricci流的研究中，我们证明了加权Laplace算子相关的椭圆方程$Lu=0$的Liouville定理，证明了关于热方程$\partial_t u = Lu$的Li-Yau Hanack和Hamilton型不等式。

与合作者一起，我们在加权流形上利用Bakry-Emery Ricci曲率证明了Cheeger-Gromov分裂定理，改进了法国科学院院士A. Lichenerowicz在70年代的结果。

与合作者一起， 我们证明了紧致收缩Ricci孤立子上的加权Laplace算子第一特征值下界的估计，改进了日本著名几何学家Futaki和澳大利亚几何分析学家 B. Andrews与L. Ni的相应结果。我们的结果给出了紧致收缩Ricci孤立子是平凡孤立子（即Einstein流形）的一个有力判据。

进一步, 受Lott-Villani及Sturm关于测度度量空间上的Ricci曲率问题的研究的启发，我们在紧致Riemann流形的Wasserstein概率测度空间上引入了$\mathcal{W}$-熵，证明了$\mathcal{W}$-熵 在Wasserstein测地流(对应最优传输问题L^2问题的解)的单调性。

受Bismut工作的启发，我们引进了连接Wasserstein空间上的测地流和梯度流之间的Langevin形变流，证明了 Boltzmann H-熵沿Langevin形变流的凸性。

交互粒子系统（随机矩阵特征值），不可压缩Navier-Stokes方程的随机变分刻画

利用无穷维Wasserstein空间上的梯度流和微分几何，我们(S. Li, X.D. Li, Y.-X. Xie)研究了具有对数交互作用和一般外场位势的交互粒子系统的经验测度过程的大数定律与中心极限定理。

对无穷维保体积微分同胚群上的随机微分方程，我们(S. Li, X.D. Li, G.P. Liu) 推广了随机动态规划原理，并给出了不可压缩Navier-Stokes方程新的随机变分刻画。

若干挑战性问题及研究方向

- Loop空间上的Dirac算子及其指标定理（构造性量子场论中的问题）
- Bismut: Hypoelliptic Witten deformation on cotangent bundle
- Renormalization group flows与量子场论中的非线性σ-模型（特例： Ising模型）
- Φ^3_4-量子场论与KPZ方程的最新研究（Martin-Hairer的工作）
- 随机曲面和渗流（percolation），Gaussian free fields

谢 谢 ！