Langlands 纲领的近期进展

中国科学院数学与系统科学研究院
李文威

2017 年 9 月 6 日

起源: Poincaré (1880 年起)

定义 $\mathscr{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im(\tau) > 0\}$. 矩阵 Lie 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \left\{g \in \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det g > 0\right\}$ 在 $\mathscr{H}$ 上有左作用

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow[\sim]{\gamma \mapsto \gamma\sqrt{-1}} \mathscr{H}.$$

起源: Poincaré (1880 年起)

定义 $\mathscr{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im(\tau) > 0\}$. 矩阵 Lie 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \left\{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det g > 0\right\}$ 在 $\mathscr{H}$ 上有左作用

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow[\sim]{\gamma \mapsto \gamma\sqrt{-1}} \mathscr{H}.$$

- 相对于度量 $\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$ (置 $\tau = x + \sqrt{-1} \cdot y$), 上半平面 $\mathscr{H}$ 具有常曲率 -1; 它是**双曲几何**的模型.
- 可证明 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ 等于 $\mathscr{H}$ 的全纯自同构群, 也等于 $\mathscr{H}$ 的保距 + 保向自同构群.

- Poincaré 考虑了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散子群 Γ, 和满足于

$$f(\gamma\tau) = f(\tau), \quad \tau \in \mathscr{H}, \gamma \in \Gamma$$

  的全纯函数 $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$. 他称这类 Γ 为 Fuchs 群, f 为 Fuchs 函数, 并且用现称为 Poincaré 级数的方法来构造 f.
- 更一般的概念是权 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 级 Γ 的**模形式**, 相应的对称性是

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma.$$

- Poincaré 考虑了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散子群 Γ, 和满足于

$$f(\gamma\tau) = f(\tau), \quad \tau \in \mathscr{H}, \gamma \in \Gamma$$

  的全纯函数 $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$. 他称这类 Γ 为 Fuchs 群, f 为 Fuchs 函数, 并且用现称为 Poincaré 级数的方法来构造 f.
- 更一般的概念是权 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 级 Γ 的**模形式**, 相应的对称性是

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma.$$

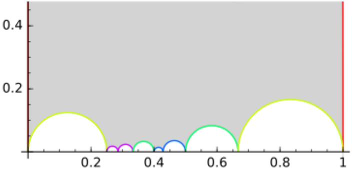
- 对于特定的 Γ, 商空间 $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ 可视为某类几何对象的**模空间**, 如

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N) := \Gamma_1(N)\backslash\mathscr{H} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{(E, P) : P \in E = \text{复环面}, NP = 0\right\}/\simeq \\ \Psi & & \Psi \\ \tau & \longmapsto & \left(\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}}, \frac{a\tau + b}{N} \bmod \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}\right). \end{array}$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ni \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod{N}\right\}.$$

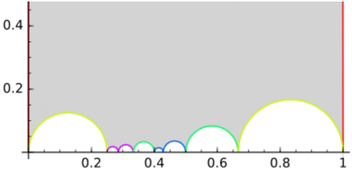
模形式的一般理论始于 Hecke 的工作. 以下仅考虑 $\Gamma = \Gamma_1(N)$ 情形.

1. 在 $\Gamma_1(N)$ 作用下 $\mathscr{H}$ 可由一个基本区域铺砌; 添入**尖点**可将 $Y_1(N)$ 紧化为 $X_1(N)$. 级 $\Gamma_1(N)$ 的模形式和紧 Riemann 曲面 $X_1(N)$ 的几何密切相关. 下图: $\Gamma_1(7)$ 有 6 个尖点, 由 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ 和 y 轴方向的 $+\infty$ 代表, $X_1(7)$ 的亏格为 0.



模形式的一般理论始于 Hecke 的工作. 以下仅考虑 $\Gamma = \Gamma_1(N)$ 情形.

1. 在 $\Gamma_1(N)$ 作用下 $\mathscr{H}$ 可由一个基本区域铺砌; 添入**尖点**可将 $Y_1(N)$ 紧化为 $X_1(N)$. 级 $\Gamma_1(N)$ 的模形式和紧 Riemann 曲面 $X_1(N)$ 的几何密切相关. 下图: $\Gamma_1(7)$ 有 6 个尖点, 由 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ 和 y 轴方向的 $+\infty$ 代表, $X_1(7)$ 的亏格为 0.



2. 模形式的一般定义里要求 f 在尖点附近有界; 在尖点附近趋近 0 者称为**尖点形式**. 特别地, f 在 ∞ 处有 Fourier 展开

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \ \tau \in \mathscr{H}.$$

系数 $a_n(f)$ 常蕴藏微妙的算术信息, 例如 Ramanujan 的 $\tau(n)$.

定义 $M_k(\Gamma)$ 为模形式构成的 $\mathbb{C}$-向量空间, $S_k(\Gamma)$ 为尖点形式所成子空间.

- 对于源于算术的 Γ, 这些空间具有一族称为 **Hecke 算子**的自同态.
- 相应于模形式 f 的 L-函数定义为

$$L(s,f) = \sum_n a_n(f) n^{-s}, \quad \Re(s) \gg_f 0.$$

  适当条件下, $L(s,f)$ 有**亚纯延拓**和相对于 $s \leftrightarrow k-s$ 的**函数方程**.
- 复环面 $=$ 复椭圆曲线. 对应到 $X_1(N) \supset Y_1(N)$ 的模空间实际是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的代数–几何对象, 这是 $M_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_1(N))$ 的许多算术性质的源头.

定义 $M_k(\Gamma)$ 为模形式构成的 $\mathbb{C}$-向量空间, $S_k(\Gamma)$ 为尖点形式所成子空间.

- 对于源于算术的 Γ, 这些空间具有一族称为 **Hecke 算子**的自同态.
- 相应于模形式 f 的 L-函数定义为

$$L(s,f) = \sum_n a_n(f)n^{-s}, \quad \Re(s) \gg_f 0.$$

  适当条件下, $L(s,f)$ 有**亚纯延拓**和相对于 $s \leftrightarrow k-s$ 的**函数方程**.
- 复环面 $=$ 复椭圆曲线. 对应到 $X_1(N) \supset Y_1(N)$ 的模空间实际是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的代数–几何对象, 这是 $M_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_1(N))$ 的许多算术性质的源头.

例子 (取 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$):

- Eisenstein 级数 $G_{2k}(\tau) = \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{\vec{0}\}}(a\tau+b)^{-2k} \in M_{2k}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$;
- Ramanujan 函数 $\Delta(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} \in S_{12}$, ……

定义 $M_k(\Gamma)$ 为模形式构成的 $\mathbb{C}$-向量空间, $S_k(\Gamma)$ 为尖点形式所成子空间.

- 对于源于算术的 Γ, 这些空间具有一族称为 **Hecke 算子**的自同态.
- 相应于模形式 f 的 L-函数定义为

$$L(s,f)=\sum_n a_n(f)n^{-s}, \quad \Re(s)\gg_f 0.$$

  适当条件下, $L(s,f)$ 有**亚纯延拓**和相对于 $s\leftrightarrow k-s$ 的**函数方程**.
- 复环面 $=$ 复椭圆曲线. 对应到 $X_1(N)\supset Y_1(N)$ 的模空间实际是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的代数–几何对象, 这是 $M_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_1(N))$ 的许多算术性质的源头.

例子 (取 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$):

- Eisenstein 级数 $G_{2k}(\tau)=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{\vec{0}\}}(a\tau+b)^{-2k}\in M_{2k}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$;
- Ramanujan 函数 $\Delta(\tau)=q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}\in S_{12}$, ……

进一步, 还能够纳入 $k\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, Hilbert 和 Siegel 模形式 (具有多个复变元), 或非全纯的 f 等等.

引入群论

仍设 $\Gamma = \Gamma_1(N)$. 对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, 定义

$$\left(f \Big|_k \gamma\right)(\tau) = (\det \gamma)^{\frac{k}{2}} (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau).$$

可以验证

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma) &\hookrightarrow C^\infty\left(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}\right) \\ f &\longmapsto \left[\Phi : \gamma \mapsto (f \Big|_k \gamma)(\sqrt{-1})\right]. \end{aligned}$$

引入群论

仍设 $\Gamma = \Gamma_1(N)$. 对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, 定义

$$\left(f \Big|_k \gamma\right)(\tau) = (\det\gamma)^{\frac{k}{2}}(c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau).$$

可以验证

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma) &\hookrightarrow C^\infty\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}\right) \\ f &\longmapsto \left[\Phi : \gamma \mapsto (f \Big|_k \gamma)(\sqrt{-1})\right]. \end{aligned}$$

- 这启发我们研究 $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的某些光滑函数 — **自守函数**, 作为模形式的延伸.
- 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 透过平移 $\Phi(x) \xmapsto{g} \Phi(xg)$ 左作用于 $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的函数空间 (譬如 L^2 空间). 由此就引向半单 Lie 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的表示理论.

- Weyl: 建立起紧 Lie 群的表示理论.
- Gelfand/苏联学派, 和 Godement 等人: 用 Lie 群的表示理论来诠释特殊函数.
- Harish-Chandra: 从 1950 年代起深入地研究了半单 Lie 群的无穷维表示.

- Weyl: 建立起紧 Lie 群的表示理论.
- Gelfand/苏联学派, 和 Godement 等人: 用 Lie 群的表示理论来诠释特殊函数.
- Harish-Chandra: 从 1950 年代起深入地研究了半单 Lie 群的无穷维表示.

一般情形下, 研究 $G(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 上的平移表示, 及其不可约分解 ("谱分解"), 其中

- $G(\mathbb{R})$ 由定义在 $\mathbb{Q}$ 上的**半单线性群** G 的 $\mathbb{R}$-点构成, 带 Haar 测度;
- $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ 是**算术子群**, 亦即基本上来自 G 的 $\mathbb{Z}$-结构的离散子群, 例如 $\Gamma_1(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

- Weyl: 建立起紧 Lie 群的表示理论.
- Gelfand/苏联学派, 和 Godement 等人: 用 Lie 群的表示理论来诠释特殊函数.
- Harish-Chandra: 从 1950 年代起深入地研究了半单 Lie 群的无穷维表示.

一般情形下, 研究 $G(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 上的平移表示, 及其不可约分解 ("谱分解"), 其中

- $G(\mathbb{R})$ 由定义在 $\mathbb{Q}$ 上的**半单线性群** G 的 $\mathbb{R}$-点构成, 带 Haar 测度;
- $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ 是**算术子群**, 亦即基本上来自 G 的 $\mathbb{Z}$-结构的离散子群, 例如 $\Gamma_1(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

简单类比, 对应到幂幺交换群 $\mathbb{G}_a$

对于加法群 $\mathbb{R}$ 及其离散子群 $\mathbb{Z}$, 环面上的 Fourier 分析给出

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\xi_n, \quad \xi_n(x) := e^{2\pi i n x}.$$

酉表示的抽象理论给出

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) = \int^{\oplus}_{\pi:\text{不可约酉表示}} \pi^{\oplus m(\pi,\Gamma)}\,\mathrm{d}\mu(\pi) = L^2_{\mathrm{disc}} \oplus L^2_{\mathrm{cont}}.$$

酉表示的抽象理论给出

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) = \int_{\pi:\text{不可约酉表示}}^{\oplus} \pi^{\oplus m(\pi,\Gamma)}\,\mathrm{d}\mu(\pi) = L^2_{\mathrm{disc}} \oplus L^2_{\mathrm{cont}}.$$

事实. 权 $k \geq 2$, 级 Γ 的尖点模形式 $= L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 的不可约子表示 (所谓**离散系**表示) 里的光滑 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-最高权向量.

酉表示的抽象理论给出

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) = \int^{\oplus}_{\pi:\text{不可约酉表示}} \pi^{\oplus m(\pi,\Gamma)}\, d\mu(\pi) = L^2_{\mathrm{disc}} \oplus L^2_{\mathrm{cont}}.$$

事实. 权 $k \geq 2$, 级 Γ 的尖点模形式 $= L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 的不可约子表示 (所谓**离散系**表示) 里的光滑 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-最高权向量.

初步目标 (表示论观点)

对 $G(\mathbb{R})$ 的不可约酉表示 π, 研究它在 $L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中的重数 $m(\pi,\Gamma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

常用工具: 迹公式等等...

赋值和 adèle 环

数论上, **整体域**分成两类:

- 数域 $=\mathbb{Q}$ 的有限扩张,
- 函数域 $=\mathbb{F}_q(t)$ 的有限扩张 (q: 某素数 p 的幂).

对整体域 F 的每个赋值 v 都可以作完备化, 得到**局部域** F_v, 它们是局部紧拓扑域.

$$F=\mathbb{Q}\xrightarrow{v=\text{标准绝对值}} F_v=\mathbb{R},$$

$$\xrightarrow{v=p\text{-进绝对值}} F_v=\mathbb{Q}_p=\mathbb{Z}_p\left[\frac{1}{p}\right]=\left(\varprojlim_r \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\right)\left[\frac{1}{p}\right],$$

$$F=\mathbb{F}_q(t)\xrightarrow{v=(t=0)} F_v=\mathbb{F}_q(\!(t)\!)=\mathbb{F}_q[\![t]\!]\left[\frac{1}{t}\right].$$

用限制积定义 **adèle 环** $\mathbb{A}:=\prod'_v F_v \overset{\text{对角}}{\supset} F$, 其中 v 取遍 F 的赋值; $\mathbb{A}$ 是局部紧环, $F\subset\mathbb{A}$ 是离散子环.

回到谱分解

- 推而广之, 容许 G 为数域或更一般的整体域 F 上的**约化群**, 如 GL_n, SL_n, Sp_{2n}, E_8 等等.
- (Chevalley) 限制积 $G(\mathbb{A}) = \prod'_v G(F_v)$ 是局部紧群, 赋予 Haar 测度; $G(F)$ 对角嵌入为离散子群.
- 存在无挠闭子群 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 使得 $\mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi) < +\infty$; 在数域 F 上, Ξ 有标准的选法.

回到谱分解

- 推而广之, 容许 G 为数域或更一般的整体域 F 上的**约化群**, 如 GL_n, SL_n, Sp_{2n}, E_8 等等.
- (Chevalley) 限制积 $G(\mathbb{A}) = \prod'_v G(F_v)$ 是局部紧群, 赋予 Haar 测度; $G(F)$ 对角嵌入为离散子群.
- 存在无挠闭子群 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 使得 $\mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi) < +\infty$; 在数域 F 上, Ξ 有标准的选法.

我们研究

$$\boxed{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi) \text{ 在 } G(\mathbb{A}) \text{ 右平移作用下的谱分解.}}$$

经典框架下 ($F = \mathbb{Q}$), 使用 $\mathbb{A}$ 相当于同时考虑所有的算术子群 Γ. 所谓的 Hecke 算子反映为 $\prod_{v\nmid\infty} G(F_v)$ 的作用.

在函数域或者局部域 $F \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的情形, 表示里的一个向量 "光滑" 意谓在一个紧开子群的作用下不变.

定义

L^2-自守表示 $=$ $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 的子表示. L^2-自守形式 $=$ 光滑函数 $f : G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi \to \mathbb{C}$, 平方可积且满足于

- 在 $G(\mathbb{A})$ 作用下光滑,
- 在 $\mathscr{Z}(U(\mathfrak{g}_\infty))$ 作用下张成有限维空间, $\mathfrak{g}_\infty = \prod_{v|\infty} \mathfrak{g} \otimes_F F_v$.
- 某种意义下的缓增函数.

注记

- 以上框架皆适用于 F 为函数域的情形. 但这时不再有无穷赋值 ∞, 而且 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 的选取不唯一.
- 数域情形常要求 f 在 $\prod_{v|\infty} G(F_v)$ 的一个极大紧子群 K_∞ 作用下有限.

光滑表示

- 对定义在局部域 E 上的约化群 G, 实用中经常以 $G(E)$ 的**光滑表示**取代酉表示. 当 $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 时较为棘手: 一般考虑 Harish-Chandra 模或 Casselman–Wallach 表示.
- 整体情形同样可探讨 $G(\mathbb{A})$ 的不可约光滑表示 π, 有唯一分解 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$. 如果 π 出现在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 则称 π 是自守表示. 自守形式落在其中.
- 尽管定义涉及拓扑和测度, 非 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的局部域上的不可约光滑表示理论本质上是 "代数的". 函数域上的自守形式理论亦然.

光滑表示

- 对定义在局部域 E 上的约化群 G, 实用中经常以 $G(E)$ 的**光滑表示**取代酉表示. 当 $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 时较为棘手: 一般考虑 Harish-Chandra 模或 Casselman–Wallach 表示.
- 整体情形同样可探讨 $G(\mathbb{A})$ 的不可约光滑表示 π, 有唯一分解 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$. 如果 π 出现在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 则称 π 是自守表示. 自守形式落在其中.
- 尽管定义涉及拓扑和测度, 非 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的局部域上的不可约光滑表示理论本质上是 “代数的”. 函数域上的自守形式理论亦然.

自守表示的研究化为:

1. 分类局部域上约化群的不可约光滑表示 — 调和分析;
2. 对于 $G(\mathbb{A})$ 的表示 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$, 研究它在 $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 中的重数 — 算术.

Langlands 对偶群

设 G 是局部或整体域 F 上的约化群, $\mathrm{Gal}_F := \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}|F)$, Weil 群记为 $W_F \to \mathrm{Gal}_F$. **Langlands 对偶** $\check{\mathrm{G}}$ 定义为拟分裂 $\mathbb{C}$-约化群 (事实上 $/\mathbb{Z}$)

$$
\begin{tikzcd}
 & G_{/F} \arrow[r, "\text{约化群的结构定理}"] & \text{根资料 } (X^*, \Delta, X_*, \check{\Delta}) \circlearrowleft \mathrm{Gal}_F \arrow[d, "\text{对偶}"'] \\
\mathrm{Gal}_F \overset{\text{自同构}}{\circlearrowleft} & \check{\mathrm{G}}_{/\mathbb{Z}} & \text{根资料 } (X_*, \check{\Delta}, X^*, \Delta) \circlearrowleft \mathrm{Gal}_F \arrow[l, "\text{还是结构定理}"]
\end{tikzcd}
$$

Langlands 对偶群

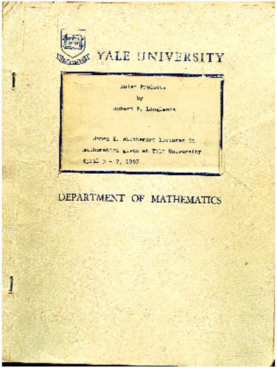
设 G 是局部或整体域 F 上的约化群, $\mathrm{Gal}_F := \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}|F)$, Weil 群记为 $W_F \to \mathrm{Gal}_F$. **Langlands 对偶** $\check{\mathrm{G}}$ 定义为拟分裂 $\mathbb{C}$-约化群 (事实上 $/\mathbb{Z}$)

$$\begin{tikzcd}
 & G_{/F} \arrow[r, "\text{约化群的结构定理}"] & \text{根资料 } (X^*, \Delta, X_*, \check{\Delta}) \circlearrowleft \mathrm{Gal}_F \arrow[d, "\text{对偶}"'] \\
\mathrm{Gal}_F \overset{\text{自同构}}{\circlearrowleft} \check{\mathrm{G}}_{/\mathbb{Z}} & & \text{根资料 } (X_*, \check{\Delta}, X^*, \Delta) \circlearrowleft \mathrm{Gal}_F \arrow[ll, "\text{还是结构定理}"]
\end{tikzcd}$$

定义 L-**群** (Weil 形式) ${}^L G := \check{\mathrm{G}} \rtimes W_F$; Galois 形式定义为 $\check{\mathrm{G}} \rtimes \mathrm{Gal}_F$. 事实上取 $\mathrm{Gal}_{K|F}$ 使得 G 在有限扩张 $K|F$ 上分裂即可.

也可将 $\check{\mathrm{G}}$ 看作 $\mathrm{Spec}(F)_{\text{ét}}$ 上取值在约化群的局部常值层.

Langlands 在研究 Eisenstein 级数的常数项时发现了 ${}^L G$ 的角色.



R. P. Langlands, *Euler Products* (1967).

同年一月份, 他在一封给 Weil 的信中提出了所谓的 Langlands 纲领.

非分岐表示

设 $E \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是局部域, 群 G 在赋值环 $\mathfrak{o}_E$ 上有 “好” 的模型 $\rightsquigarrow K := G(\mathfrak{o}_E)$. 定义. 若 $G(E)$ 的不可约光滑表示 π 满足 $\pi^K \neq \{0\}$, 则称为**非分岐**. 这时 G 在 E 的某个非分岐扩张上分裂.

非分岐表示

设 $E \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是局部域, 群 G 在赋值环 $\mathfrak{o}_E$ 上有 “好” 的模型 $\rightsquigarrow K := G(\mathfrak{o}_E)$. 定义. 若 $G(E)$ 的不可约光滑表示 π 满足 $\pi^K \neq \{0\}$, 则称为**非分岐**. 这时 G 在 E 的某个非分岐扩张上分裂.

佐武一郎对应

非分岐表示一一对应于几何商 $(\check{\mathrm{G}} \rtimes \mathrm{Fr}) \overset{\mathrm{Ad}}{/\!/} \check{\mathrm{G}}$ 的点, 记为 $\pi \leftrightarrow c_\pi$

注记. 设 G 是整体域 F 上的约化群, $\pi = \bigotimes_v' \pi_v$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示, 则对几乎所有的 v, 分解中的 π_v 都是非分岐的.

非分歧表示

设 $E \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是局部域，群 G 在赋值环 $\mathfrak{o}_E$ 上有 "好" 的模型 $\rightsquigarrow K := G(\mathfrak{o}_E)$. 定义. 若 $G(E)$ 的不可约光滑表示 π 满足 $\pi^K \neq \{0\}$, 则称为**非分歧**. 这时 G 在 E 的某个非分歧扩张上分裂.

佐武一郎对应

非分歧表示一一对应于几何商 $(\check{G} \rtimes \mathrm{Fr}) \overset{\mathrm{Ad}}{/\!/} \check{G}$ 的点，记为 $\pi \leftrightarrow c_\pi$

注记. 设 G 是整体域 F 上的约化群，$\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示，则对几乎所有的 v, 分解中的 π_v 都是非分歧的.

- 取充分大的赋值集 $S \supset \{v : v \mid \infty\}$, $|S| < \infty$, 使得 $v \notin S$ 时 π_v 非分歧；定义 $\mathscr{C}^S(G) = \prod_{v \notin S} (\check{G} \rtimes \mathrm{Fr}_v /\!/ \check{G})$.
- 与 π 对应之 $(c_{\pi,v})_v \in \mathscr{C}^S(G)$ 称为**佐武参数**，是自守表示的重要不变量；S 可以任意扩大故取 $\mathscr{C}(G) := \varinjlim_S \mathscr{C}^S(G)$.

以 q_v 记 F_v 的剩余类域的基数. 设自守表示 π 在 S 外非分歧.

部分 L-函数

设 $\rho : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 为线性表示, 对 $\Re(s) \gg_\pi 0$ 定义

$$L^S(s, \pi, \rho) := \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v, \rho) \quad \text{(Euler 乘积)},$$

$$L(s, \pi_v, \rho) := \det\left(1 - \rho(c_{\pi,v}) q_v^{-s}\right)^{-1}.$$

当 $G = \mathrm{GL}_n$, $\check{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 而 $\rho = \mathrm{std}$ 时, 得到 Godement–Jacquet 的标准 L-函数的 S-部分.

以 q_v 记 F_v 的剩余类域的基数. 设自守表示 π 在 S 外非分歧.

部分 L-函数

设 $\rho : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 为线性表示, 对 $\Re(s) \gg_\pi 0$ 定义

$$L^S(s,\pi,\rho) := \prod_{v \notin S} L(s,\pi_v,\rho) \quad \text{(Euler 乘积)},$$

$$L(s,\pi_v,\rho) := \det\left(1 - \rho(c_{\pi,v}) q_v^{-s}\right)^{-1}.$$

当 $G = \mathrm{GL}_n$, $\check{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 而 $\rho = \mathrm{std}$ 时, 得到 Godement–Jacquet 的标准 L-函数的 S-部分.

猜想 (Langlands)

$L(s,\pi,\rho)$ 具有亚纯延拓和相对于 $s \leftrightarrow 1-s$ 的函数方程.

函子性猜想

自守性质对佐武参数施加了严格的限制，相应的参数构成子集 $\mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(G)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{aut}}(G)$; Langlands 发现随着 G 变化，佐武参数具有紧凑的结构.
设同态 $f : {}^L H \to {}^L G$ 与向 W_F 的投影交换，它诱导 $f_* : \mathscr{C}^S(H) \to \mathscr{C}^S(G)$.

弱函子性猜想 (Langlands)

以上的 f_* 限制为 $\mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(H) \to \mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(G)$，换言之 f_* 保持佐武参数的自守性.

函子性猜想

自守性质对佐武参数施加了严格的限制，相应的参数构成子集 $\mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(G)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{aut}}(G)$; Langlands 发现随着 G 变化，佐武参数具有紧凑的结构.
设同态 $f : {}^L H \to {}^L G$ 与向 W_F 的投影交换，它诱导 $f_* : \mathscr{C}^S(H) \to \mathscr{C}^S(G)$.

弱函子性猜想 (Langlands)

以上的 f_* 限制为 $\mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(H) \to \mathscr{C}^S_{\mathrm{aut}}(G)$, 换言之 f_* 保持佐武参数的自守性.

- 如果 $\rho : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, 而 $H(\mathbb{A})$ 和 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示 σ, π 如此联系，按定义立见
$$L^S(s, \sigma, \rho \circ f) = L^S(s, \pi, \rho).$$
- 进一步猜想：给定 f, 应当可以将 H 的自守表示**提升**到 G 的自守表示 (或自守表示的 “包”).
- 应用：如能证明 f 为对称幂 $\mathrm{Sym}^k : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}\left(\binom{n+k-1}{k}\right)$ 时的函子性，即能推出 **Ramanujan 猜想**.

对局部域 E, 置 $\mathrm{WD}_E = \begin{cases} W_E, & E = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), & \text{其它情形.} \end{cases}$. Langlands 猜测:

- 在局部域 E 上, 定义 $\Pi(G)$ 为 $G(E)$ 的不可约光滑表示集, 精确到同构; 定义 L-**参数**集为

$$\Phi(G) := \left\{ \begin{tikzcd} \mathrm{WD}_E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_E & \end{tikzcd} + \text{连续等条件} \right\} \Big/ \check{G}-\text{共轭.}$$

  存在满足种种相容性的**满射** $\Pi(G) \twoheadrightarrow \Phi(G)$, 诸纤维 Π_ϕ 称为 L-**包** Π_ϕ; 这些有限集的结构可用 $\mathrm{Cent}_{\check{G}}(\mathrm{im}(\phi))$ 来描述.
- 对于非分岐表示: 回归佐武参数.
- 在整体域 F 上, 自守表示同样用 $\phi : L_F \to {}^L G$ 的共轭类来描述, 群 L_F 理当是 W_F 的某个扩张. 在数域情形, L_F 的存在性或是 Langlands 纲领最深的内容之一.

- Arthur (1989, 1990) 对局部–整体的关系和自守表示的重数有更精细的猜想.
- 如果只考虑 $G = \mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$, 一切归结为局部和整体**类域论**. 这时 L_F 的角色可用 W_F 代替.
- 对于一般的 GL_n, Langlands 对应可以视作一种**非交换互反律**.

几何, 算术与分析: $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{C}$,

$$\begin{tikzcd}
& \text{几何对象 (“原相”)}_{/F} \arrow[dl, shift left, "H^\bullet_{\text{ét}}((-)_{\bar{F}};\mathbb{Q}_\ell)"] \arrow[dr, "\text{模性}"] & \\
\text{Galois 表示} \arrow[ur, shift left, "\text{Fontaine–Mazur 猜想}"] \arrow[rr, shift left, "\text{自守提升}"] & & \text{自守表示} \arrow[ll, shift left, "\text{Langlands 参数}"]
\end{tikzcd}$$

这些箭头至少要使各种 L-函数相对应:

[1]此处采取黎景辉老师建议的译名.

几何, 算术与分析: $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{C}$,

$$\begin{tikzcd}
 & \text{几何对象 (“原相”)}_{/F} \arrow[dl, shift left, "H^\bullet_{\text{ét}}((-)_{\bar{F}};\mathbb{Q}_\ell)"] \arrow[dr, "\text{模性}"] & \\
\text{Galois 表示} \arrow[ur, shift left, "\text{Fontaine–Mazur 猜想}"] \arrow[rr, shift left, "\text{自守提升}"] & & \text{自守表示} \arrow[ll, shift left, "\text{Langlands 参数}"]
\end{tikzcd}$$

这些箭头至少要使各种 L-函数相对应:

- 原相[1]的 L-函数 (推广了 Hasse–Weil ζ-函数),
- Galois 表示的 Artin L-函数,
- 自守表示的种种 L-函数.

细化: ℓ-无关性. p-进 Langlands 纲领等等.

[1]此处采取黎景辉老师建议的译名.

案例 $E: Y^2 = X^3 - X$

设 E 为 $\mathbb{Q}$ 上椭圆曲线, 其 "原相" 分解为 $E = h^0 \oplus h^1 \oplus h^2$. 对应 h^1 的 ℓ-进 Galois 表示来自 **Tate 模** $T_\ell(E) = \varprojlim_r E[\ell^r]$.

$$\zeta(E,s) := \prod_{p:\text{有好约化}} Z\left(E_{\mathbb{F}_p}, p^{-s}\right) \cdot (\text{其它有限多项}) \quad \Re(s) \gg 0,$$

$$\log Z(E_{\mathbb{F}_p}, t) = \sum_{r \geq 1} |E(\mathbb{F}_{p^r})| \frac{t^r}{r};$$

$$\zeta(E,s) = \underbrace{\zeta(s)}_{h^0} \underbrace{L(E,s)}_{h^1}{}^{-1} \underbrace{\zeta(s-1)}_{h^2}.$$

案例 $E: Y^2 = X^3 - X$

设 E 为 $\mathbb{Q}$ 上椭圆曲线, 其 "原相" 分解为 $E = h^0 \oplus h^1 \oplus h^2$. 对应 h^1 的 ℓ-进 Galois 表示来自 **Tate 模** $T_\ell(E) = \varprojlim_r E[\ell^r]$.

$$\zeta(E,s) := \prod_{p:\text{有好约化}} Z\left(E_{\mathbb{F}_p}, p^{-s}\right) \cdot (\text{其它有限多项}) \quad \Re(s) \gg 0,$$

$$\log Z(E_{\mathbb{F}_p}, t) = \sum_{r \geq 1} |E(\mathbb{F}_{p^r})| \frac{t^r}{r};$$

$$\zeta(E,s) = \underbrace{\zeta(s)}_{h^0} \underbrace{L(E,s)}_{h^1}{}^{-1} \underbrace{\zeta(s-1)}_{h^2}.$$

考虑带复乘椭圆曲线 $E: Y^2 = X^3 - X$, 则 $L(E,s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$,

$$\sum_{n \geq 1} a_n q^n = q \prod_{n \geq 1} (1-q^{4n})^2 (1-q^{8n})^2$$

$$= \left(\eta(4\tau)\eta(8\tau)\right)^2 \in S_2(\Gamma_0(32)); \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

此处 $\tau \in \mathscr{H}$ 而 $\eta(\tau)$ 是 Dedekind η-函数.

自守提升问题的一个进展 (2017)

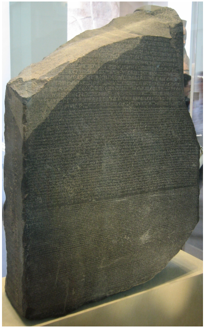
- 作者群: Allen, Calegari, Caraiani, Gee, Helm, Le Hung，Newton, Scholze, Taylor.
- 成果: 复乘域 $F \supset \mathbb{Q}$ 上 n-维 Galois 表示 (+ 种种条件) 的模性 (涵摄来自椭圆曲线 $E_{/F}$ 的 Galois 表示), **不需要表示的自对偶条件**.
- 若干应用
  - 非复乘椭圆曲线 $E_{/F}$ 的佐藤–Tate 猜想;
  - 权 0 的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 的正则代数尖点自守表示的 Ramanujan 猜想 (手法: 对之证明对称幂具有 “潜在自守性”).

Dedekind–Kronecker–Weil

以下, (代数) 曲线默认为几何连通的光滑射影曲线.

A. Weil 设想的 “Rosetta 石碑”:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{数域} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\text{函数域}_{/\mathbb{F}_q} \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[d, leftrightarrow] & & \text{函数域}_{/\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{曲线 } C_{/\mathbb{F}_q} & & \text{曲线 } C_{/\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

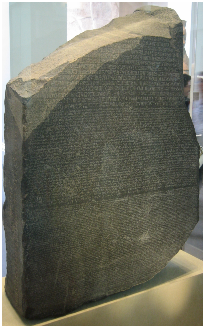


Dedekind–Kronecker–Weil

以下, (代数) 曲线默认为几何连通的光滑射影曲线.

A. Weil 设想的 “Rosetta 石碑”:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{数域} \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\text{函数域}_{/\mathbb{F}_q} \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[d, leftrightarrow] & & \text{函数域}_{/\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{曲线 } C_{/\mathbb{F}_q} & & \text{曲线 } C_{/\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$



- 曲线上有更多的几何结构, 如正特征函数域上的 Frobenius 自同构, Riemann 曲面上的微分算子. 初步例证: 函数域上的 Riemann 假设 (Weil, Deligne...).
- 梦想: 发展一套**绝对几何学** $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \underbrace{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)}_{???}$.

考虑曲线 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 如上, 函数域 $F := \mathbb{F}_q(C)$. 定义 $A^\circ := \prod_v \mathfrak{o}_{F_v} \subset \mathbb{A} = \mathbb{A}_F$. Weil 注意到

$$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\circ) \xleftrightarrow{1:1} \left\{\text{秩 } n \text{ 向量丛}_{/C}\right\}/\simeq .$$

考虑曲线 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 如上, 函数域 $F := \mathbb{F}_q(C)$. 定义 $A^\circ := \prod_v \mathfrak{o}_{F_v} \subset \mathbb{A} = \mathbb{A}_F$.
Weil 注意到

$$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\circ) \xleftrightarrow{1:1} \left\{\text{秩 } n \text{ 向量丛}_{/C}\right\}/\simeq .$$

- 秩 n 向量丛相当于 GL_n-挠子 (= 主丛): $V \mapsto \mathrm{Isom}_{\text{向量丛}}(\mathscr{O}_C^{\oplus n}, V)$.
- 对一般的约化群 G (假设分裂), C 上 G-挠子的模空间 Bun_G 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个光滑**代数叠**. 双射的右式 $= \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{F}_q)$ (取同构类).
- 更进一步, 给定 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 的有限闭子概型 N, 对挠子加入 N 结构 (= 在 N 上的平凡化) 得到模空间 $\mathrm{Bun}_{G,N}$; $\mathrm{Bun}_{G,\varnothing} = \mathrm{Bun}_G$.

考虑曲线 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 如上, 函数域 $F := \mathbb{F}_q(C)$. 定义 $A^\circ := \prod_v \mathfrak{o}_{F_v} \subset \mathbb{A} = \mathbb{A}_F$. Weil 注意到

$$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\circ) \xleftrightarrow{1:1} \left\{\text{秩 } n \text{ 向量丛}_{/C}\right\}/\simeq .$$

- 秩 n 向量丛相当于 GL_n-挠子 (= 主丛): $V \mapsto \mathrm{Isom}_{\text{向量丛}}(\mathscr{O}_C^{\oplus n}, V)$.
- 对一般的约化群 G (假设分裂), C 上 G-挠子的模空间 Bun_G 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个光滑**代数叠**. 双射的右式 $= \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{F}_q)$ (取同构类).
- 更进一步, 给定 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 的有限闭子概型 N, 对挠子加入 N 结构 (= 在 N 上的平凡化) 得到模空间 $\mathrm{Bun}_{G,N}$; $\mathrm{Bun}_{G,\varnothing} = \mathrm{Bun}_G$.

注记. 若对付非分裂的 G, 宜考虑 C 上的 **Bruhat–Tits 群概型**.

对 Shafarevich 群 $\ker^1(F,G)$ 里的每个 α, 选定代表元 $a \in Z^1(F,G)$ 构作 G 的纯内形式 G_α, 再对每个 v 取 $b \in G\left(F_v^{\mathrm{sep}}\right)$ 使得 $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}_{F_v}$, $a_\sigma = b^{-1}\sigma(b)$. 得出同构 $G_\alpha(\mathbb{A}) \simeq G(\mathbb{A})$.

对 Shafarevich 群 $\ker^1(F,G)$ 里的每个 α, 选定代表元 $a \in Z^1(F,G)$ 构作 G 的纯内形式 G_α, 再对每个 v 取 $b \in G\left(F_v^{\mathrm{sep}}\right)$ 使得 $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}_{F_v}$, $a_\sigma = b^{-1}\sigma(b)$. 得出同构 $G_\alpha(\mathbb{A}) \simeq G(\mathbb{A})$.

定理

令 $K_N \subset G(\mathbb{A}^\circ)$ 为 $N \subset C$ 对应的同余子群, 则

$$\underbrace{\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)}_{\text{只看同构类, 或取 } \pi_0} \xleftrightarrow{1:1} \bigsqcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F)\backslash G_\alpha(\mathbb{A})/K_N.$$

对应到平凡 α 的恰好是 Zariski-局部平凡的 G-挠子. 若 G 分裂或 G_{der} 单连通, 则 $\ker^1(F,G)$ 平凡. 双射对 Ξ 的自然作用等变.

对 Shafarevich 群 $\ker^1(F,G)$ 里的每个 α, 选定代表元 $a \in Z^1(F,G)$ 构作 G 的纯内形式 G_α, 再对每个 v 取 $b \in G\left(F_v^{\mathrm{sep}}\right)$ 使得 $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}_{F_v}$, $a_\sigma = b^{-1}\sigma(b)$. 得出同构 $G_\alpha(\mathbb{A}) \simeq G(\mathbb{A})$.

定理

令 $K_N \subset G(\mathbb{A}^\circ)$ 为 $N \subset C$ 对应的同余子群, 则

$$\underbrace{\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)}_{\text{只看同构类, 或取 } \pi_0} \xleftrightarrow{1:1} \bigsqcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A}) / K_N .$$

对应到平凡 α 的恰好是 Zariski-局部平凡的 G-挠子. 若 G 分裂或 G_{der} 单连通, 则 $\ker^1(F,G)$ 平凡. 双射对 Ξ 的自然作用等变.

- 当 $N \nearrow$ 时 $K_N \searrow \{1\}$, 这说明在函数域上, 自守形式所居的 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi$ 是几何对象 (模空间) 的某种影子.
- 纯内形式 G_α 也出现在经典框架下 (Langlands, Vogan).
- 基本证明工具: **Beauville–Laszlo 下降**.

数域上的一种类比 (Stuhler). 定义

$$\mathsf{Vect}_n := \left\{ \mathscr{E} = (L, b) \,\middle|\, \begin{array}{l} L: \text{ 自由 } \mathbb{Z}\text{-模}, \ \mathrm{rk}(L) = n \\ b: \ L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ 上的内积} \end{array} \right\} + \text{同构的概念}.$$

取 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 的极大紧子群 $K = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K &\simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\backslash \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big) \\ &\simeq \mathsf{Vect}_n/\simeq . \end{aligned}$$

如定义子丛 $=$ 无挠 $\mathbb{Z}$-子模 $+$ 诱导内积,

$$\deg(\mathscr{E}) := -\log \operatorname{vol}\big(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/L\big), \quad \mathrm{rk}(\mathscr{E}) := \mathrm{rk}(L), \quad \mu := \frac{\deg}{\mathrm{rk}}$$

则在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K$ 上有类似 Harder–Narasimhan 滤过的理论.

实现整体 Langlands 对应的思路 (函数域 $F \supset \mathbb{F}_q$)

取 $\gcd(\ell, q) = 1$, 让表示和对偶群 $\check{G}$ 都以 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 为定义域. L-参数 $\rightsquigarrow$ 连续的 $W_F \to {}^L G$.

以 $G = \mathrm{GL}_n$ 为例, 一个经典想法是寻觅合适的几何对象 $\mathscr{X}$ 使得 $H^\bullet(\mathscr{X}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 带有 $\mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$-作用, 透过不可约分解

$$H^\bullet(\mathscr{X}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\sigma,\pi} \sigma \boxtimes \pi \quad (\text{作为 } \mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A}) - \text{表示})$$

在 Gal_F 和 $G(\mathbb{A})$ 的表示之间建立某种对应. 对照: 数域情形—志村簇.

实现整体 Langlands 对应的思路 (函数域 $F \supset \mathbb{F}_q$)

取 $\gcd(\ell, q) = 1$, 让表示和对偶群 $\check{G}$ 都以 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 为定义域. L-参数 $\rightsquigarrow$ 连续的 $W_F \to {}^L G$.

以 $G = \mathrm{GL}_n$ 为例, 一个经典想法是寻觅合适的几何对象 $\mathscr{X}$ 使得 $H^\bullet(\mathscr{X}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 带有 $\mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$-作用, 透过不可约分解

$$H^\bullet(\mathscr{X}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\sigma,\pi} \sigma \boxtimes \pi \quad (\text{作为 } \mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A}) - \text{表示})$$

在 Gal_F 和 $G(\mathbb{A})$ 的表示之间建立某种对应. 对照: 数域情形—志村簇.

Drinfeld

运用初等的表示论论证, 可说明对于 $G = \mathrm{GL}_2$ 此路不通. 然而可考虑 $\mathrm{Gal}_F \times \mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$ 的作用来实现之.

称自守形式 f 是**尖点形式**, 如果对任意抛物子群 $P = MU \subsetneq G$ 和 $x \in G(\mathbb{A})$, 积分 $\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(xu)\,\mathrm{d}u = 0$. 由尖点形式生成的自守表示称为**尖点表示**, 是离散自守谱的基本构件: $L^2_{\mathrm{cusp}} \subset L^2_{\mathrm{disc}}$.

称自守形式 f 是**尖点形式**, 如果对任意抛物子群 $P = MU \subsetneq G$ 和 $x \in G(\mathbb{A})$, 积分 $\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(xu)\,\mathrm{d}u = 0$. 由尖点形式生成的自守表示称为**尖点表示**, 是离散自守谱的基本构件: $L^2_{\mathrm{cusp}} \subset L^2_{\mathrm{disc}}$.

- Drinfeld (1978) 对 GL_2 证明了 Langlands 猜想. 这里起作用的 $\mathscr{X}$ 是所谓两爪 ($r = 2$) 的 штука 的模空间.
- L. Lafforgue (2002) 发展了这一思路, 结合分析学工具证明了 GL_n 的整体 Langlands 对应.
- 阿部知行 arXiv:1310.0528 用**等晶体** ($\approx p$-进上同调的系数) 取代 ℓ-进 Galois 表示.
- 更多情形: 如 Kazhdan–Varshavsky 等等. 模空间的几何性质至关重要.
- 对一般 G 的情形, V. Lafforgue arXiv:1209.5352 对尖点表示得到了 Langlands 猜想的自守 $\to$ Galois 方向. 他考虑了具有 r 个爪的 штука.

V. Lafforgue 给出代数刻画: f 是尖点形式 $\iff$ 它在 Hecke 算子作用下张成有限维空间, 即 “Hecke 有限”.

Hecke 叠和 штука(设 G 分裂)

$I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_k$: 有限集. $N \subset C$: 有限子概型. 定义 ind-代数叠

$$\mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)} = \left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i\in I} \in (C \smallsetminus N)^I : \\ (\mathscr{G}_j, \psi_j) \in \mathrm{Bun}_{G,N},\ 0 \le j \le k \\ \psi_j : \underbrace{\mathscr{G}_{j-1} \longrightarrow \mathscr{G}_j}_{\text{限制在 } C\smallsetminus\bigcup_{i\in I_j} x_i},\ 1 \le j \le k \end{array} \middle| \phi_j \text{ 保持级结构 } \psi_{j-1}, \psi_j. \right\}$$

更确切地说: 对每个概型 $S_{/\mathbb{F}_q}$, 在 $C \times S$ 和 $C \times S \smallsetminus \bigcup_{i\in I_j} \Gamma_{x_i}$ 上指定上述资料 (构成一个广群).

如在 $N = \varnothing$ 情形另加平凡化 $\theta : \mathscr{G}_k \simeq G \times C$, 得到 ind-概型 $\mathrm{Gr}_I^{(I_1,\ldots,I_k)}$ (Beilinson–Drinfeld 仿射 Grassmann 簇).

再用拉回图表定义叠 $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} \arrow[d, "(\mathscr{G}_0,\mathscr{G}_k)"] \\ \mathrm{Bun}_{G,N} \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{Fr})"'] & \mathrm{Bun}_{G,N} \times \mathrm{Bun}_{G,N} \end{tikzcd}$$

这就是带 N 级结构的 штука 的模空间.

再用拉回图表定义叠 $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} \arrow[d, "(\mathscr{G}_0,\mathscr{G}_k)"] \\
\mathrm{Bun}_{G,N} \arrow[r, "(\mathrm{id},\mathrm{Fr})"'] & \mathrm{Bun}_{G,N} \times \mathrm{Bun}_{G,N}
\end{tikzcd}$$

这就是带 N 级结构的 штука 的模空间.

- 施加 $\mathscr{G}_0$ 的稳定性条件 μ (类似 Harder–Narasimhan) 和 $\forall \phi_j$ 的 “相对位置” $\underline{\omega}$ 来截出 $\mathrm{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}$ 和 $\mathrm{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)}$ 等等.
- 自然态射 $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} \to (C \smallsetminus N)^I$ 给出所谓的 $r := |I|$ 只 “爪”.
- 可考虑 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 的作用……

上同调

- 改用 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$ 替代 $\underline{\omega}$. 有光滑态射

$$\epsilon : \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\ldots)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\ldots)}/G_{\sum_i \infty x_i}.$$

- **几何佐武一郎对应**对 W 给出反常层 $\mathscr{S}_W$, 对 $(C \smallsetminus N)^I$ 适当地归一化后用 ϵ 拉回 Cht/Ξ, 得到 $\mathscr{F}_W$. 限制到 $\leq \mu$ 部分, 作 !-推出到 $(C \smallsetminus N)^I$, 得到 $\mathscr{H}_W^{\leq\mu} \in D_c^b((C \smallsetminus N)^I)$.
- 记对角态射为 $\Delta : C \to C^I$. 取 C 的泛点 η 和几何点 $\bar{\eta} \mapsto \eta$, $\overline{\eta^I} \mapsto \eta^I$; 注意到 $\overline{\eta^I} \rightsquigarrow \Delta(\bar{\eta})$ (选定特殊化 $\mathfrak{sp}$). 我们有

$$H_{I,W} := \left(\varinjlim_{\mu} \mathscr{H}_W^{\leq\mu} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hecke 有限}} \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{sp}^*} \left(\cdots \Big|_{\overline{\eta^I}} \right)^{\text{Hecke 有限}}.$$

以下是 $(I, W) \mapsto H_{I,W}$ 的一些性质.

- $H_{I,W}$ 带有 $\mathrm{Gal}_F^I = \pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$ 作用, 无关 $\mathfrak{sp}^*$, $\overline{\eta^I}$ 的选取.
- 任意 $\zeta: I \to J$ 诱导 $\check{G}^J \to \check{G}^I$, 从而有拉回 $W \mapsto W^\zeta \in \mathrm{Rep}(\check{G}^J)$; 存在自然同构 $\chi_\zeta: H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$ (这里要用上 BD-Grassmann 簇理论里的融合积).
- 对 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$ 有函子性.
- 记 $\mathbf{1}$ 为平凡表示, 则

$$H_{\varnothing,\mathbf{1}} = C_c^{\mathrm{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right) = H_{\{0\},\mathbf{1}}.$$

基本要素: 用 Drinfeld 引理制造 $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$-作用; Varshavsky 的结果联系到 $C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi)$; 某种 Eichler–志村关系式 (导致有限性)……

Lafforgue 的出游算子

设 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$, $x \in W^{\check{G}-\mathrm{inv}}$, $\xi \in W^*_{\check{G}-\mathrm{coinv}}$, $\vec{\gamma} \in \mathrm{Gal}_F^I$. 引入符号 0, 记 $\zeta_I : I \to \{0\}$; 相应地 $\check{G} = \check{G}^{\{0\}} \to \check{G}^I$ 是对角嵌入. 定义算子 $S_{I,W,x,\xi,\vec{\gamma}}$ 为合成

$$\begin{tikzcd}
H_{\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend left, "\text{张爪}"] & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[r, "\sim", "\chi_{\zeta_I}^{-1}"'] & H_{I,W} \arrow[d, "\vec{\gamma}\text{: 沿爪“出游”}"] \\
H_{\{0\},\mathbf{1}} & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[l, "\xi"'] & H_{I,W} \arrow[l, "\sim", "\chi_{\zeta_I}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{收爪}"]
\end{tikzcd}$$

设 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$, $x \in W^{\check{G}\text{-inv}}$, $\xi \in W^*_{\check{G}\text{-coinv}}$, $\vec{\gamma} \in \mathrm{Gal}_F^I$. 引入符号 0, 记 $\zeta_I : I \to \{0\}$; 相应地 $\check{G} = \check{G}^{\{0\}} \to \check{G}^I$ 是对角嵌入. 定义算子 $S_{I,W,x,\xi,\vec{\gamma}}$ 为合成

$$
\begin{tikzcd}
H_{\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend left, "\text{张爪}"] & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[r, "\sim", "\chi_{\zeta_I}^{-1}"'] & H_{I,W} \arrow[d, "\vec{\gamma}\text{: 沿爪“出游”}"] \\
H_{\{0\},\mathbf{1}} & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[l, "\xi"] & H_{I,W} \arrow[l, "\sim"', "\chi_{\zeta_I}"] \arrow[ll, bend left, "\text{收爪}"]
\end{tikzcd}
$$

Hecke 算子: 取 $I = \{1, 2\}$, 不可约表示 $V \in \mathrm{Rep}(\check{G})$, 自明的 $x : \mathbf{1} \to V \boxtimes V^*$, $\xi : V \boxtimes V^* \to \mathbf{1}$, $\vec{\gamma} = (\gamma, 1)$ 满足 $\gamma \in \mathrm{Gal}_{F_v}$, $\deg(\gamma) = 1$, 即是经典 Hecke 算子 $h_{V,v}$ 的作用.

出游算子可进一步改编成 $S_{I,f,\vec{\gamma}}$, 其中 f 是 $\check{G}^I$ 上的双边 $\check{G}$-不变正则函数.

- 此诸算子构成 $\mathrm{End}\left(C_c^{\mathrm{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right)\right)$ 的一个有限维**交换**子代数, 和 $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N)$ 的卷积作用交换. 因而

$$C_c^{\mathrm{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right) = \bigoplus_{\nu:\mathscr{B}^{\mathrm{red}} \text{ 的特征标}} \left(\mathfrak{H}_\nu : \text{广义特征子空间}\right).$$

- 运用一些几何不变量理论 (主要依赖 Richardson 的结果), V. Lafforgue 证明这些 ν 对应到 L-参数 $\sigma : \mathrm{Gal}_F \to \check{G}$, 满足种种相容性条件. 从而给出了 Langlands 对应的一个方向.
- 对于 $G = \mathrm{GL}_n$, 出游算子归结为 Hecke 算子, 而 $\nu \rightsquigarrow \sigma$ 归结为伪特征标理论 (Taylor). 上述结果化为 L. Lafforgue 结果的弱版本.

余论

1. V. Lafforgue 的结果可望有进一步的强化.
2. 特别地, 正特征情形下的局部 Langlands 对应或能由受限 штука 的模空间来实现 (Genestier–Lafforgue).
3. 几何方法也能处理零特征情形的局部 Langlands 对应: Fargues–Scholze 纲领 arXiv:1602.00999, 基本上成功在望.

余论

1. V. Lafforgue 的结果可望有进一步的强化.
2. 特别地, 正特征情形下的局部 Langlands 对应或能由受限 штука 的模空间来实现 (Genestier–Lafforgue).
3. 几何方法也能处理零特征情形的局部 Langlands 对应: Fargues–Scholze 纲领 arXiv:1602.00999, 基本上成功在望.

几何化 (Gaitsgory 等)

线索: Deligne–Drinfeld–Laumon. 考虑曲线 $C_{/\mathbb{F}_q}$ (特征 p) 或连通紧 Riemann 曲面 $C_{/\mathbb{C}}$ (特征零), 和相应的函数域 F. 设 G 分裂, 考察非分岐情形.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q) \text{ 上自守函数} & \xleftarrow{\text{层–函数字典}} & \mathrm{Bun}_G \text{ 上的 “自守层” (特征 } p) \\
\bigsqcup_\alpha G_\alpha(F)\backslash G_\alpha(\mathbb{A})/G_\alpha(\mathbb{A}^\circ) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell} & & \Big\vdots \text{ Riemann–Hilbert 对应} \\
 & & \mathrm{Bun}_G \text{ 上的 } D\text{-模 (特征零)}
\end{array}
$$

$$
\text{非分岐 Galois 表示} + \check{G}\text{-结构} \longleftrightarrow \check{G}\text{-局部系统}
$$

参考材料: Gaitsgory 的 Bourbaki 报告 arXiv:1606.09462.

范畴化 + 几何化 (概述)

这里只论特征零情形.

- 全体 C 上的 $\check{G}$-局部系统构成 $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}$: 具有**导出代数叠**的结构.
- 可定义 Bun_G 上的 D-模的导出范畴 $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$, 是一个 dg-范畴.

范畴化 + 几何化 (概述)

这里只论特征零情形.

- 全体 C 上的 $\check{G}$-局部系统构成 $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}$: 具有**导出代数叠**的结构.
- 可定义 Bun_G 上的 D-模的导出范畴 $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$, 是一个 dg-范畴.

猜想

存在典范的 dg-范畴等价

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IndCoh}_{\mathscr{N}}\left(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}\right) & \xrightarrow{\mathbb{L}_G} & \mathrm{D}\left(\mathrm{Bun}_G\right) \\ \cup\!\!\uparrow & & \\ \mathrm{QCoh}\left(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}\right) & & \end{array}$$

满足**种种性质**. 特别地, $\mathbb{L}_G$ 保持 **Hecke 作用** (几何佐武一郎对应: Lusztig–Drinfeld–Ginzburg–Mirković–Vilonen–朱歆文–Richarz 等人).

考虑特征零的主因似乎在于一个消没猜想.

与物理学的关系 (概述)

一些学者认为, Weil 的 Rosetta 石碑上应当还有第四种语言: **量子场论**.

- Kapustin–Witen: S-对偶性 $\rightsquigarrow$ 几何 Langlands, 见 arXiv:hep-th/0604151.
- 较近的工作: Aganagic–Frenkel–Okounkov arXiv:1701.03146.

量子 Langlands 对应?

- 形变参数: Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 上的非退化 Weyl-不变二次型 κ; 它对应到 $\check{G}$ 上类似的资料 $-\kappa^{-1}$.
- 当二次型 $\to 0$ 时, 量子 Langlands 退化到几何 Langlands.
- 在量子框架下, G 和 $\check{G}$ 的地位是对等的. 下为 arXiv:1601.05279 的 Conjecture 4.2:

$$\mathrm{D}_{\kappa}\left(\mathrm{Bun}_G\right) \overset{?}{\simeq} \mathrm{D}_{-\kappa^{-1}}\left(\mathrm{Bun}_{\check{G}}\right);$$

  对应两侧都是自守的 (由 D-模构成), 但被 κ 所 “扭曲”.
- Gaitsgory 认为这解释了 Langlands 对应如何可能, 比 $\mathbb{L}_G$ 更为根本.
- 可以和约化群 G 的某些**覆叠群**搭上线, 见 Gaitsgory–Lysenko arXiv:1608.00284.

以上一切谬误不当之处皆属本人之咎.

望赐教!