

Fourier 与 Fourier 分析：

科学的唯一目的是人类精神之荣耀？

范爱华

Picardie 大学，法国

2019 年 5 月 8 日

提纲

- ▶ 谁是 J. Fourier?
- ▶ Fourier 的 Fourier 分析 :热的解析理论
- ▶ Dirichlet 定理: Fourier 级数的收敛性 – 分析的典范
- ▶ Riemann 理论: 三角级数表示的函数
- ▶ Cantor 唯一性: 集合论与拓扑学起源
- ▶ Fejér 定理 : 转折点
- ▶ Fourier 分析在法国

I. 谁是 Joseph Fourier ?



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 年 3 月 21 日 -1830 年 5 月 16 日)
[乾隆 (1711-1799) 嘉庆(1760—1820) 道光(1782—1850)]
[波拿巴 - 拿破仑 (1769 年 8 月 15 日 -1821 年 5 月 5 日)]

Fourier : 历史学家，省长，物理学家，数学家

- ▶ 《埃及描述》
- ▶ 伊泽尔省(Isère) 省长
- ▶ 温室效应、Fourier 定律(热转导定律)
- ▶ Fourier 级数/Fourier 变换

- ▶ 埃菲尔铁塔上 72 位科学家之一
- ▶ 百科全书名不经传(Encyclopaedia Universalis before 1974)

Fourier 出生地欧塞尔(Auxerre)

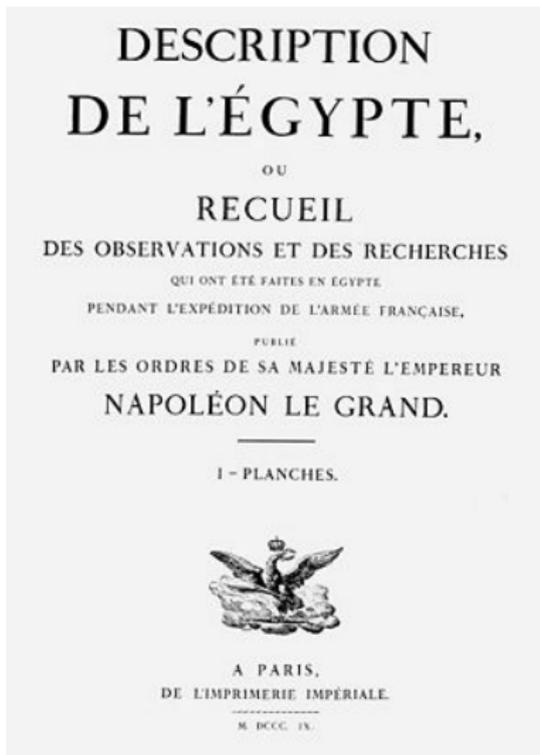


Fourier 出生地欧塞尔(Auxerre)

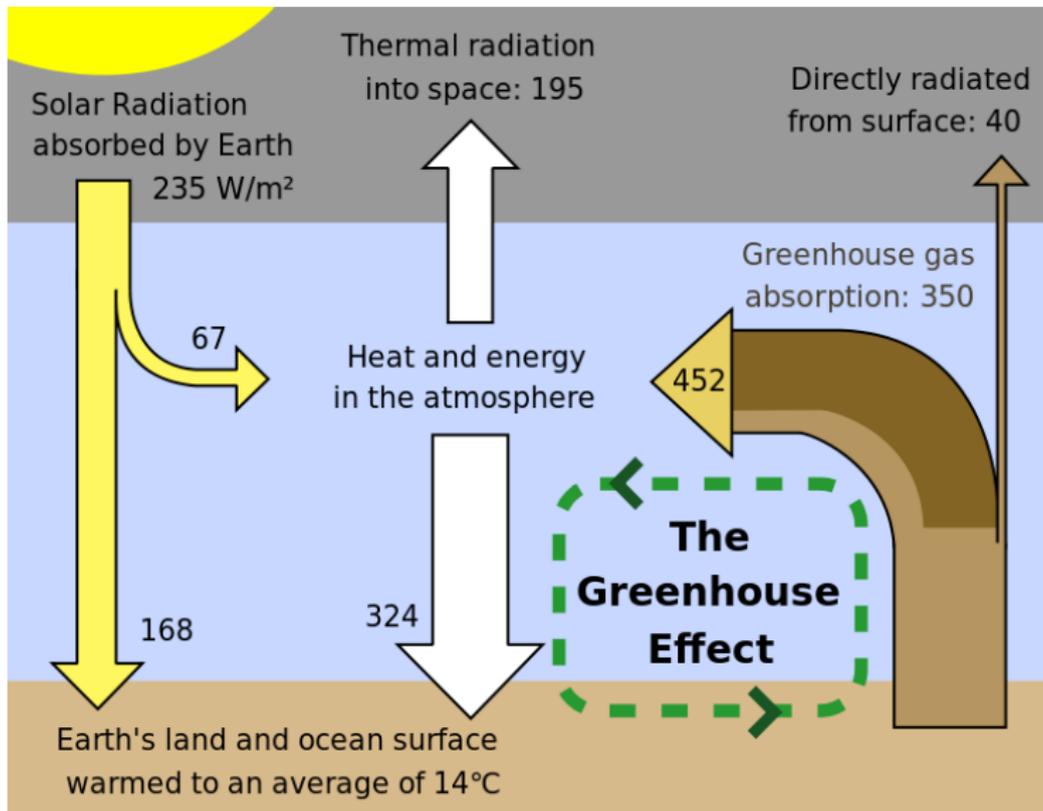


埃及描述

23 卷的巨作 (出版于 1809-1829), Fourier 主编, Fourier 作序



温室效应



Fourier 方程 (热传导方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}$$

Fourier 定律

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -k \oint_S \vec{\nabla} T \cdot d\vec{A}$$

Fourier 变换

▶ Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$$

▶ Fourier 合成

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$$

Fourier : 生平简介

- ▶ 1768 生于法国东南部 Auxerre, 裁缝之子, 十岁而孤
- ▶ 1783 (14 岁) 毕业于 Auxerre 军校
- ▶ 1785 (16 岁) 军校教数学
- ▶ 1787-1789 (18-21 岁) 数学教师, Orléans
- ▶ 1793 路易十六被砍头
- ▶ 1794 (26 岁) 入巴黎高师作学生(第一届) / 入巴黎高工作老师
- ▶ 1797 (29 岁) 巴黎高工, 即位 Joseph-Louis Lagrange
- ▶ 1798 (30 岁) 随拿破仑出征埃及
- ▶ 1802 (34 岁) 被拿破仑任命为 Isère 省省长 (直至 1815)
- ▶ 1807 (39 岁) 投稿 《**固体内之热转导**》.
- ▶ 1812 (44 岁) 科学院大奖
- ▶ 1817 (49 岁) 法国科学院院士
- ▶ 1822 (54 岁) 法国科学院终身秘书, 出版 《**热的解析理论**》
- ▶ 1826 (58 岁) 法兰西学院院士
- ▶ 1830 (62 岁) 瑞典皇家科学院外籍院士

Jacobi : 为民服务 VS 人类精神之荣耀

1830 年 7 月 4 日, Jacobi (26 岁) 写给 Legendre (78 岁) :

Poisson 先生本不该在他的报告里转述 *Fourier* 先生那句不太恰当的话 – 他指责 *Abel* 和我关心其它的事物而不愿关心热的运动。诚然, *Fourier* 先生的观点是, 数学的主要目的是为民服务 (*utilité publique*) 和解释自然现象; 但是, 像他这样的哲学家应该不会忘记, 科学的唯一目标是 **人类精神之荣耀**。故此, 一个数论的问题等值于一个有关世界体系的问题。

前辈



Bernoulli (1700-1782)



Euler (1707-1783)



d'Alembert (1717-1783)

老师



Lagrange (1736-1813)



Monge (1746-1818)



Laplace (1749-1827)

竞争对手



Poisson (1781-1840)



Cauchy (1789-1857)

继承人



Dirichlet (1805-1859)



Riemann (1826-1866)



Cantor (1845-1918)

II. 热亦数控

(Et ignem regunt numeri)

- ▶ 1807 固体中的热传导理论 (投稿科学院) [审稿人 : Lagrange, Monge, Lacroix. Silence. Short report (1808,P.)]
- ▶ 1811 热亦数控 (参加竞争科学院大奖) [审稿人 : Lagrange, Laplace, Malus, Haüy, Legendre]
- ▶ 1812 (元月 6 号) 获得大奖
- ▶ 1822 出版 “热的解析理论”

非完善的创新

Fourier 获得大奖(1812), 但是评审报告很保留 :

这项工作确实得到了热在物力内部和表面传导的真实方程。该课题的新意及其重要性促使评委会授予此项工作科学院大奖。然而, 我们也注意到, 作者导出他的那些方程的**方法**并非没有困难, 用以求解方程的**分析**有待进一步改善, 无论是其**一般性**还是其**严格性**。

评审委员会没有发表 Fourier 的著作 . **严密性** 和 **一般性** 需要两百年的工作 .

经典 Fourier 分析

- ▶ Fourier 公式 (分解 Analysis)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

- ▶ Fourier 级数 (合成 Synthesis)

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Fourier 的 Fourier 分析

1807 年 12 月 21 日, Fourier 断言

区间上的**任何**(用图形表示的) 函数可以展开成这样的级数, 其系数由一个积分公式给出; 而级数**逐点收敛**于该函数。

Fourier 用到函数与 $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$ 的**卷积**。

Riemann(1854) :

- ▶ 年迈的大学者 Lagrange(71 岁) 感到如此意外, 以致坚决反对。科学院存有文档(Dirichlet \rightarrow Riemann)。
- ▶ 竞争对手 Poisson 驳斥 Fourier, 将优先权归于 Lagrange。后者其实只考虑过有限群的 Fourier 分析。他离那信仰还很遥远。Lagrange 倒是认为, 任意**解析表达**的周期函数可以表示为三角级数。

Fourier 分析 – 两百年的思考与探索

- ▶ 何谓函数? (d'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange, Dirichlet)
- ▶ 何谓可积函数? (Dirichlet, Riemann, Lebesgue) Dirichlet 函数
- ▶ 存在发散的连续函数的 **Fourier 级数** (du Bois-Reymond, Dirichlet, Jordan, Lebesgue, Kolmogorov, Kahane, Katznelson, Carleson, Hunt, Fefferman, ...)
- ▶ 集合论和拓扑学始于 Fourier 级数的收敛性研究 (Cantor)
- ▶ 广义函数的萌芽见于函数的三角级数表示 (Riemann)

Fourier 说过的那句话，人们思考了两百年！

热平衡 : Dirichlet 问题

- ▶ Infinite rectangle body : $R = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, +\infty)$
- ▶ Boundary condition : $u(x, 0) = 1, \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$;
 $u(-\pi/2, y) = u(\pi/2, y) = 0, \forall y > 0$
- ▶ Find solution of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Consider solutions of the form $u(x, y) = f(x)g(y)$ and take into account the boundary condition and the boundedness of u :

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} e^{-(2k+1)y} \cos((2k+1)x).$$

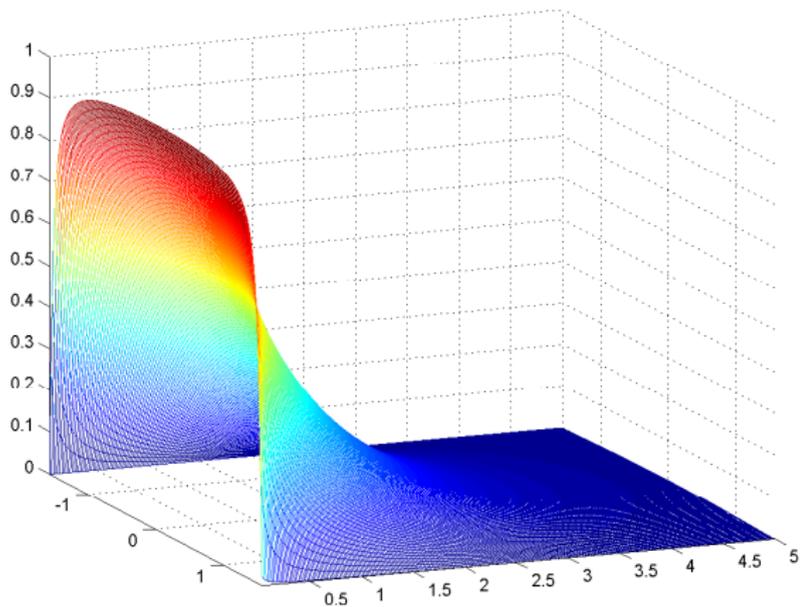
From

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos((2k+1)x), \quad (x \in [-\pi/2, \pi/2]); \quad a_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}$$

Fourier got the closed form

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2 \cos x}{e^y - e^{-y}}.$$

u 的图像



$u(x, y)$

调和分析

- ▶ 交换调和分析 (Haar, Pontryagin, Kampen, Weil)

G 局部紧 Abel 群, 共轭群 \widehat{G} , $\widehat{\widehat{G}} = G$, dx Haar 测度,

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx, \quad f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x) d\chi.$$

- ▶ 非交换调和分析 (Schur, Peter, Weyl)

$$O(n); \quad \{-1, 1\} = SO(1), \mathbb{S}^1 = SO(2), SO(n);$$

$$U(n), U(1) = \mathbb{S}^1; \quad SU(n);$$

$$Sp(n), Sp(1) = \mathbb{S}^3 / \{-1, 1\},$$

- ▶ 群表示

Fourier 被遗忘?

雨果的《悲惨世界》(1862 年出版), 卷 3 关于1817 年:

Il y avait à l'Académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié, et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont la postérité se souviendra.

.... 不闻名的圣西门正计划他的好梦。科学院有过一位闻名于世的傅立叶，后世已把他忘却，我不知道从哪个黑暗的角落里又钻出了另一位傅立叶，后世将永志不忘

François Marie Charles Fourier (7 April 1772-10 October 1837)

Fourier 被遗忘 – 为什么？

- ▶ 雨果只是陈述当时弥散在法国的人们的感受。Arago 是雨果的朋友，Fourier 作为科学院终身秘书的继位者。在悼词中，Arago 几乎未提 Fourier 数学工作。讣告直接埋葬了数学家 Fourier.
- ▶ Fourier 有很有影响力的竞争对手：Poisson, Cauchy.
- ▶ 巴黎有一条街 "Rue Ch. Fourier"。没有哪里有一条数学家 Fourier 命名的街道。
- ▶ Fourier 全集未曾编辑出版。
- ▶ 《Fourier 选集》1880-1890 由 Darboux 编辑出版。

III. Dirichlet 定理：第一收敛定理 / 严密性典范

(Crelle Journal, 4 (1829), 157-169, 法文)

定理 假设 $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 具有有限个不连续点和有限个极大极小。那么，对任何 x ，Fourier 级数收敛到 $\frac{1}{2}(\varphi(x+) + \varphi(x-))$ 。

引理 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

关键引理 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且单调 ($0 \leq a < b < \pi/2$)。那么积分 $\int_a^b \frac{\sin nx}{\sin x} f(x) dx$ 趋于 $\frac{\pi}{2} f(0)$ 或 0，视 $a = 0$ 或 $a > 0$ 而定。

→ Riemann-Lebesgue 引理之雏形。

→ Dirichlet-Jordan 定理 (1881): 对有界变差函数而言。有界变差函数应运而生。

→ 对 Fourier 的欣赏 / 对 Cauchy 的批评 / Dirichlet 不可积函数 /

Dirichlet 论文的前言

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données

正弦和余弦之级数，通过它们可以表示给定区间上的任意函数，该级数具有许多引人注目的性质，其中之一是其收敛性。这一性质没有逃脱那位大数学家的法眼，他引入了表示给定函数的方式，从而开拓出分析应用的新道路。这个性质陈述于最早的关于热的研究的论文当中。但是，就我所知，没有人给出一般的证明。我只知道，Cauchy 先生的一项工作，发表在 1823 年的巴黎科学院的论文集里。该文的作者承认，他的证明不适合某些函数，而这些函数的级数的收敛性其实是无容置疑的。仔细考查上述论文后，我认为他的证明对于他认为适用的函数也是不足的。

Cauchy 的错误：

- ▶ 解析延拓的不可能性
- ▶ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ 非同时收敛

Fourier 级数收敛性研究

- ▶ Dirichlet (1829) : 收敛性第一项工作，严格分析的典范 .
- ▶ du Bois-Reymond (1873) : 连续函数 Fourier 级数的某处发散性 .
- ▶ Luzin (1915) : Luzin 猜想 .
- ▶ Kolmogorov (1922) : L^1 函数的 Fourier 级数的处处发散性 .
- ▶ Kolmogorov-Seliverstov-Plessner, Hardy, Littlewood-Paley : 部分和的估计 $s_n f(x) = o((\log n)^{1/p})$ a.e.
- ▶ Kahane-Katznelson (1966) : 任给零测集上存在 Fourier 级数发散的连续函数 .
- ▶ Carleson (1966) : 平方可积函数的 Fourier 级数几乎处处收敛 .
- ▶ Konyagin (2000) : $L(\log_+ L)^{1/2}$ 中的 Kolmogorov 型函数 .

问题：高维球面求和 .

问题：部分和的精细研究(分形，重分形).

IV. 三角级数的 Riemann 理论

(Habilitation, 1854)

Riemann 的 habilitation : 论函数三角级数表示的可能性

- ▶ 第一部分 : 历史 (Taylor, d'Alembert, Euler, Bernoulli, Lagrange)
- ▶ 第二部分 : Riemann 积分
- ▶ 第三部分 : 在函数性质不做特殊假设下对其三角级数表示的可能性研究(Ideas, methods, examples, general results)

Riemann :

大约五十年过去了, 关于任意函数的解析表示的可能性问题没有任何实质性进展。这时, *Fourier* 的一个记注对这一课题投入了一束新的曙光。这一部分数学的发展迎来了一个新的时代, 它响亮地宣告即将到来的数学物理的蓬勃发展。

Fourier 才是第一个, 精准而又完善地理解三角级数的本性的人。

Riemann 理论 (续 1)

(Habilitation, 1854)

考虑收敛的三角级数 ($a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$):

$$\forall x, \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + b_n \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x).$$

积分两次得到连续函数: $F(x) := C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}$.

定理 I. 如果 $\sum A_n(x)$ 收敛于 $f(x)$, 那么 F 的二阶对称导数等于 $f(x)$, 即

$$\lim_{(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{(2\alpha)(2\beta)} \Delta_\beta \Delta_\alpha F(x) = f(x)$$

(α 与 β 之商保持有界), 其中 $\Delta_\alpha g(x) := g(x + \alpha) - g(x - \alpha)$.

Riemann 求和:

$$\frac{F(x + 2\alpha) - 2F(x) + F(x - 2\alpha)}{(2\alpha)^2} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2$$

Riemann 理论 (续 2)

(Habilitation, 1854)

假设 $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$.

定理 II. 对任意 x (关于 x 一致地),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{(2\alpha)^1} \Delta_\alpha \Delta_\alpha F(x) = 0.$$

定理 III. 任给检验函数 $\lambda(x)$,

$$\int_a^b \cos \xi(x-c) F(x) \lambda(x) dx = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right).$$

Riemann 理论 (续 3)

Riemann 函数

$$R_1(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(nx)}{n}, \quad R_2(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}, \quad R(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

R_1 : 几乎处处收敛, $Osc_I(R_1) = \infty$ (非 Riemann 可积), $R_1 \in L^1$,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad R_1(x) = \sum_1^{\infty} \frac{d_e(n) - d_o(n)}{n\pi} \sin 2\pi nx \quad (\text{Fourier series}).$$

R_2 : 跳跃的补偿和(间断函数, 负跳跃), 稠密集上不连续, R-可积

Lévy 函数: Lévy 从属随机过程的确定性模型 $L(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(2^n x)}{2^n}$.

$\sum_1^{\infty} \frac{(nx)}{n} \sin \log n$: 某三角级数之和, 非 Riemann 可积。

Fatou 三角级数: $\sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$: 处处收敛, 其和非 Lebesgue 可积。

Riemann 理论 (续 4)

Riemann 缺项函数 : $\sum_1^\infty c_n \cos n^2 x$, $\sum_1^\infty c_n \sin n^2 x$ ($c_n \downarrow 0, \sum c_n = \infty$).

Riemann 函数 $\sum_1^\infty \frac{\sin n^2 x}{n^2}$: 可微性(Hardy¹⁹¹⁶, Gerver¹⁹⁷¹),
重分形分析(Jaffard-Meyer¹⁹⁹⁶)

Gauss 和 $\sum e^{in^2(x+iy)}$ ($y > 0$)

Weierstrass 函数: $W_{a,b}(x) := \sum_1^\infty a^n \cos b^n x$ ($0 < a < 1, b > 1, ab \geq 1$)

- ▶ 无处可微 (Hardy¹⁹¹⁶)
- ▶ $ab = 1$: 类似布朗运动的轨道(存在常点、慢点、快点)
- ▶ 布朗运动 : 常点(Lévy)、快点(Taylor)、慢点(Kahane)
- ▶ $ab > 1$: Mandelbrot 猜想 ($a = b^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1$) :
 $\dim(\text{Graph of } W_{b^{-\alpha}, b}) = 2 - \alpha$ (沈维孝²⁰¹⁸, Baranski et al.²⁰¹⁴)
- ▶ 改善的 Weierstrass 函数: $\sum_1^\infty \frac{\cos b^n x}{b^n n^\beta}$ (范爱华²⁰¹⁷)

Riemann 理论 (续 5)

Riesz 乘积(测度) :

$$\mu_a := \prod_1^\infty (1 + \operatorname{Re} a_n e^{i3^n x}), \quad (|a_n| \leq 1).$$

- ▶ μ_a 奇异 $\iff \sum |a_n|^2 = \infty$ (Zygmund¹⁹³⁷)
- ▶ $\mu_a \perp \mu_b \iff \sum |a_n - b_n|^2 = \infty$ (Peyrière¹⁹⁷⁵)
- ▶ 若 $a_n = a$, 则 μ_a 是 T - 不变的遍历测度 ($Tx = 3x \pmod{1}$)
- ▶ $\sum c_n (e^{i3^n x} - \mathbb{E}_{\mu_a} e^{i3^n x})$ μ_a -a.e. 收敛 $\iff \sum |c_n|^2 < \infty$ (Fan¹⁹⁹¹)

(随机) Riesz 乘积 : 混沌测度 *Kahane, Chin. Annal. Math.*, 1987 的特例

$$\mu_{a,\omega} := \prod_1^\infty (1 + \operatorname{Re} a_n e^{i3^n (x+\omega_n)}).$$

猜想: $\forall \omega, \mu_a \ll \mu_b \implies \mu_{a,\omega} \ll \mu_{b,\omega}, \mu_a \perp \mu_b \implies \mu_{a,\omega} \perp \mu_{b,\omega}.$

Riemann 理论 (续 6)

Furtenberg 猜想 : 设 μ 是 \mathbb{T} 上的概率测度, 满足

▶ (连续性) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N |\hat{\mu}(n)|^2 = 0;$

▶ (不变性) $\forall n, \hat{\mu}(2n) = \hat{\mu}(n) = \hat{\mu}(3n).$

那么 μ 是 Lebesgue 测度, 即 $\hat{\mu}(n) = 0 (n \neq 0).$

V. Cantor 的唯一性研究，集合论，拓扑学

(5 articles (1870-1872), 2 remarks (1880), 1 article (1882))

Cantor 继续 Riemann 的工作：

唯一性定理 若 $\sum A_n(x) = 0 (\forall x)$, 则 $a_n = b_n = 0 (\forall n)$.

预备定理 若 $a_n \sin nx + b_n \cos nx \rightarrow 0 (\forall x)$, 则 $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$.

Schwarz 定理 若 F 的二阶对称导数等于零, 则 F 是仿射函数.

- ▶ Cantor 试图将 "处处" 换成 "某个特殊集之外处处". (**唯一性集**)
- ▶ 特殊集: $A' = \emptyset$, or $A^{(m)} = \emptyset$ 对某个 $m \geq 1$ 成立. (**导集**)
- ▶ 实数的构造.

定理 (Kahane-Salem, 1963) 闭集为唯一性集当且仅当其上不支持非零的伪函数(**伪函数**).

唯一性集，多重性集

U - 集：

- ▶ W. U. Young (1909) : 可数集 .
- ▶ Rajchman (1921) : 三分 Cantor 集, q 分 Cantor 集 .
- ▶ Salem-Zygmund (1955) : Cantor set C_ξ (当且仅当 $1/\xi$ 是 Pisot 数).

M - 集：

- ▶ Lebesgue (1906) : 正测集 .
- ▶ N. Bari (1937) : Cantor 集 C_ξ ($0 < \xi = p/q < 1/2$ 且 $p > 1$).

一般事实

- ▶ U - 集和 M - 集均平移不变, 且扩张不变 (Zygmund).
- ▶ U - 集的可数并集是 U - 集 (Bari 1923).

V. Fejér (1880-1959) 定理

(Sur les fonctions bornées et intégrables, *CRAS*, 131 (1900), 984-987)

定理 设 $f \in L^\infty$. 则 $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f(x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

推论

- ▶ 指数函数的完备性 / 等周问题 (Hurwitz 1903).
- ▶ (推广) $f \in L^1$ (Fejér-Lebesgue 定理).
- ▶ 逼近论中新的积分核 (de la Vallée Poussin)
- ▶ Dirichlet-Jordan 定理新证明 (Hardy).
- ▶ Hardy, Hardy-Littlewood, M. Riesz

→ **正核**. (Katznelson)

V. Fourier Analysis 分析在法国

(二战之后)



R. Salem (1898-1963)



S. Mandelbrojt (1899-1983)

V. Fourier 分析在法国 (二战之后)



P. Malliavin (1925-2010)



J.P. Kahane (1926-2017)

Fourier 分析在法国



1963

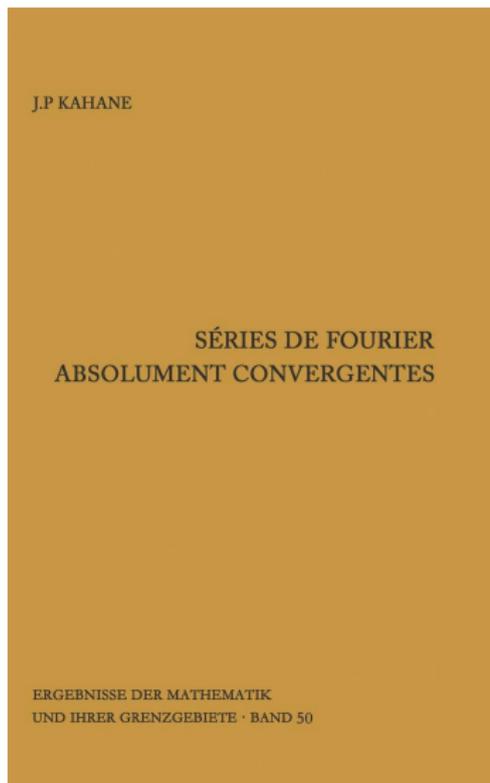
Fourier 分析在法国

R. Salem et J-P. Kahane 《完备集与三角级数》，Hermann 1963 – 序

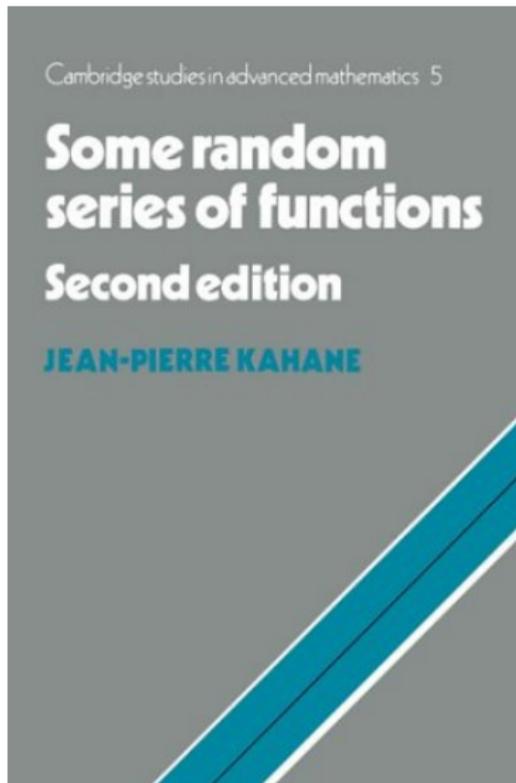
这个序言有点像是辩护词，若在几十年前，那是没必要写的。当今这个时代，大部分数学家 – 最好的数学家 – 特别地感兴趣结构性问题；本书好像有点过时，它收集了一些有如植物标本的东西。作者必须说，他们的言辞没有任何相向而动(réactionnaire)的意图。他们知道现代数学长篇巨论之美，它们的功能是不可替代的，因为，正如 Lebesgue 所言，没有这些理论则常常不能解决许多长期以来所提出来的问题。但是，作者认为，不忘统治数学对象的各式结构的同时，也允许我们对这些数学对象本身产生兴趣，这些看上去显得独立的个体，如果被细加考究，常常会发现一些隐藏着的引人入胜的特性。多位朋友称之为做“精细”(fine)数学。作者则自问他们嘴里的精细一词是褒抑或是贬；无论如何，我们希望拙作会得到谅解，因为我们不仅提出了一些问题而且知道如何解决问题。

→ Fractals, Hausdorff dimension, capacity theory, thin sets, random method, ...

Fourier 分析在法国

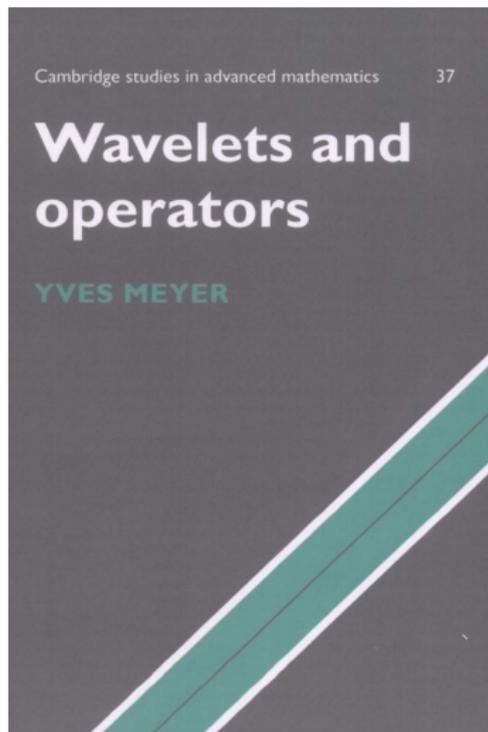


1970

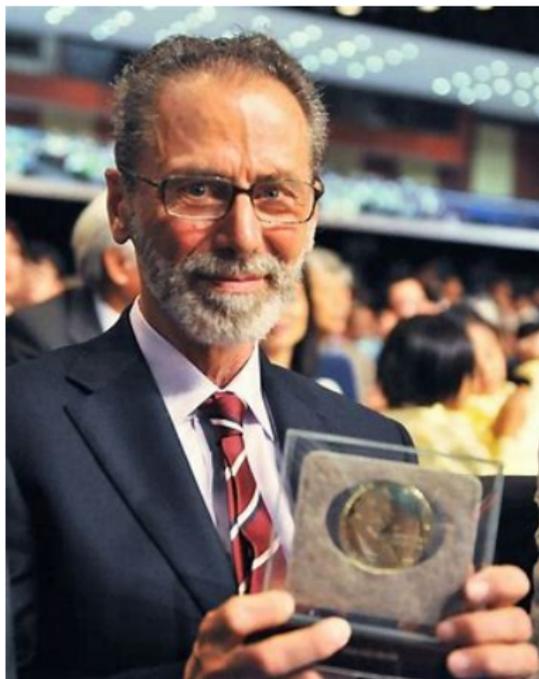


1985

Fourier 分析在法国



1990



Yves Meyer

结束语

数学物理始于 Fourier

Fourier

热运动方程、波动方程等属于分析中最新发现的科学分支之一；... 方程建立之后，必需求解其积分；... 这一艰难的研究需要一种特殊的分析，建立在新定理之上的分析，... 最终将导致数值计算,... 没有数值计算，那些个变换将徒劳无益 ...

↔ 模拟，理论，计算.

Fourier 分析与其它数学理论

- ▶ 分析的基本概念(函数/广义函数、连续、可导, 可积)
- ▶ 积分理论 (Riemann, Lebesgue, Denjoy)
- ▶ 集合论, 拓扑学 (Cantor)
- ▶ 数论 (关于素数的 Dirichlet 定理, L- 函数, ...)
- ▶ 泛函分析 (Riesz-Fisher 定理 $L^2 \equiv \ell^2$)
- ▶ 概率论 (特征函数、Lévy 连续性定理)
- ▶ 流, 扩散, 布朗运动
$$B_t = X_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(X_n \sin 2\pi n t + Y_n (1 - \cos 2\pi n t) \right)$$
- ▶ Fourier 方法 (EDP, 群表示, ...)

纯粹数学与应用数学

不同于其它学科，数学不忘过去。若言 “ 过时 ” 需得谨慎。

Fourier 的重生并未埋葬 Jacobi 与 Bourbaki。

数学先贤祠里的先贤们不断地更换着位置，时而显见时而隐形。

现在看来，Fourier 活跃在前台。

谢谢!